Classificação de Hipersuperfícies de Einstein em Produtos $\mathbb{Q}^n(\epsilon)\times\mathbb{R}$.

Celso dos Santos Formigosa

Universidade Federal do Pará, PDM

celso7cf@gmail.com

impa

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

O presente trabalho, estudou uma caracterização de hipersuperfícies de Einstein nos produtos $\mathbb{Q}^n(\epsilon)\times\mathbb{R}$ obtida no artigo [2].

Introdução

Neste trabalho, tenho estudado o problema resolvido por Leandro, Pina e dos Santos em $\mathbf{2021}$, [2], onde os autores investigaram hipersuperfícies de Einstein em produtos $\mathbb{Q}^n(\epsilon)\times\mathbb{R}$, isto é, mostraremos o seguinte resultado:

Teorema 1. *Se $f:\mathrm{M}^n\to\mathbb{Q}^n(\varepsilon)\times\mathbb{R}$, com $n>3$, é uma imersão isométrica de uma variedade de Einstein em $\mathbb{Q}^n(\varepsilon)\times\mathbb{R}$. Então M^n é uma variedade com curvatura seccional constante.*

Preliminares

Vamos estabelecer algumas noções preliminares e alguns resultados que serão utilizados na demostração do teorema 1. Denotaremos por $\mathbb{Q}^n(\epsilon)$ a esfera unitário $\mathbb{S}^n$ se $\epsilon=1$ ou $\mathbb{H}^n$ se $\epsilon=-1$. Assim, $\mathbb{Q}^n(\varepsilon)\times\mathbb{R}$ será um dos dois modelos:

$$\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}=\{(x_1,\dots,x_{n+2})\in\mathbb{E}^{n+2}|x_1^2+\dots+x_{n+1}^2=1\},$$
$$\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}=\{(x_1,\dots,x_{n+2})\in\mathbb{L}^{n+2}|-x_1^2+\dots+x_{n+1}^2=-1,\}$$

com a métrica induzida pelo espaço ambiente.

Considere agora, $f:M^n\to\mathbb{Q}^n(\varepsilon)\times\mathbb{R}$ uma hipersuperfície. Denotaremos por N seu vetor normal unitário, por $\partial_{x_{n+2}}$ o vetor coordenada na direção $\mathbb{R}$ e por T a projeção ortogonal de $\partial_{x_{n+2}}$ sobre o plano tangente de M^n. Isto é,

$$\partial_{x_{n+2}}=\mathrm{T}+\nu\mathrm{N}. \tag{1}$$

Sejam ∇ e R a conexão riemanniana e o tensor curvatura, respectivamente da hipersuperfície $f:M^n\to\mathbb{Q}^n(\varepsilon)\times\mathbb{R}$. No que segue, considere a seguinte convenção de sinais: $\mathrm{R}(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y-\nabla_{[X,Y]}Z$.

Teorema 2 (Fórmulade Gauss)**.** *Para $X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M^n)$ temos*

$$\begin{aligned}\langle\mathrm{R(X,Y)Z,W}\rangle=\;&\varepsilon\,(\langle\mathrm{X,W}\rangle\langle\mathrm{Y,Z}\rangle-\langle\mathrm{X,Z}\rangle\langle\mathrm{Y,W}\rangle\\&+\langle\mathrm{X,T}\rangle\langle\mathrm{Z,T}\rangle\langle\mathrm{Y,W}\rangle\\&+\langle\mathrm{Y,T}\rangle\langle\mathrm{W,T}\rangle\langle\mathrm{X,Z}\rangle\\&-\langle\mathrm{Y,T}\rangle\langle\mathrm{Z,T}\rangle\langle\mathrm{X,W}\rangle\\&-\langle\mathrm{X,T}\rangle\langle\mathrm{W,T}\rangle\langle\mathrm{Y,Z}\rangle)\\&+\langle\mathrm{SX,W}\rangle\langle\mathrm{SY,Z}\rangle-\langle\mathrm{SX,Z}\rangle\langle\mathrm{SY,W}\rangle.\end{aligned}$$

Em [5] foi apresentada uma uma característica das hipersuperfícies para quais T é uma direção principal.

Definimos $f:\mathrm{M}^n:=\mathrm{M}^{n-1}\times I\to\mathbb{Q}^n(\varepsilon)\times\mathbb{R}$ por

$$f(x,s)=g_s(x)+a(s)\partial_{x_{n+2}}. \tag{2}$$

para alguma função diferenciável $a:I\to\mathbb{R}$ com $a'(s)>0$ em um intervalo aberto $I\subset\mathbb{R}$.

Também em [5], o autor mostra que toda hipersuperfície que possuí T como uma direção principal é dada localmente por (2).

Lema 1. *Seja M^n uma hipersuperfície em $\mathbb{Q}^n(\varepsilon)\times\mathbb{R}$, então o tensor de Ricci de M^n é dado por*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric(Y,Z)}=\;&\varepsilon\left(n-1-|\mathrm{T}|^2\right)\langle\mathrm{Y,Z}\rangle\\&+\varepsilon(2-n)\langle\mathrm{Y,T}\rangle\langle\mathrm{Z,T}\rangle+n\mathrm{H}\langle\mathrm{SY,Z}\rangle\\&-\langle\mathrm{SY,Z}\rangle,\end{aligned}\tag{3}$$

onde Y, Z são campos vetoriais arbitrários em M^n, H é a curvatura média e S é o Operador de Weingarten.

Lema 2. *Seja M^n, $n>3$, uma hipersuperfície de Einstein em $\mathbb{Q}^n(\varepsilon)\times\mathbb{R}$. Se $\mathrm{T}\neq0$ em $p\in\mathrm{M}^n$, então T é um autovetor para o operador de Weingarten em p.*

Demonstração do Teorema 1

Primeiro, considere $\mathrm{T}=0$. Então M^n é um slice $\mathbb{Q}^n(\varepsilon)\times\{t_0\}$, isto é, uma cópia de $\mathbb{Q}^n(\varepsilon)$ para $t_0\in\mathbb{R}$. Como os slices são isométricas em $\mathbb{Q}^n(\varepsilon)$, M^n é uma variedade com curvatura seccional constante ε.

Agora, considere um subconjunto aberto Ω não vazio, onde $||\mathrm{T}||>0$. Assim, pelo lema 2, T é uma direção principal em Ω. Podemos considerar, sem perda de generalidade, que $\mathrm{T}=t_ne_n$ e $\mathrm{ST}=\lambda_n\mathrm{T}$. Como M^n é uma variedade de Einstein, temos

$$\varepsilon(n-1-||\mathrm{T}||^2)+n\mathrm{H}\lambda_i-(\lambda_i)^2-\rho=0,\quad 1\le i\le n-1, \tag{4}$$

$$\varepsilon(n-1)(1-||\mathrm{T}||^2)+n\mathrm{H}\lambda_n-(\lambda_n)^2-\rho=0. \tag{5}$$

Pode ser visto em [1], que as equações (4) e (5) determinam exatamente duas curvaturas princiais distintas uma com multiplicidade $(n-1)$ e outra com multiplicidade 1.

Finalmente, considere $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_{n-1}=\mu$, então Ω tem curvatura seccional constante. De fato, por (3)

$$\langle\mathrm{R}(e_i,e_j)e_j,e_i\rangle=\varepsilon+\mu^2,\quad 1\le i,j\le n-1, \tag{6}$$

$$\langle\mathrm{R}(e_i,e_n)e_n,e_i\rangle=\varepsilon(1-||\mathrm{T}||^2)+\mu\lambda_n. \tag{7}$$

Segue de (5), que

$$\varepsilon(1-||\mathrm{T}||^2)+\mu\lambda_n=\frac{\rho}{(n-1)}. \tag{8}$$

Então podemos concluir de (7) e (8) que

$$\langle\mathrm{R}(e_i,e_n)e_n,e_i\rangle=\frac{\rho}{(n-1)}.$$

Assim, $\langle\mathrm{R}(e_i,e_n)e_n,e_i\rangle$ é constante. Por outro lado, de (4), tem-se

$$\varepsilon(1-||\mathrm{T}||^2)+\lambda_n\mu=\rho-(n-2)(\varepsilon+\mu^2). \tag{9}$$

De (8) e (9)

$$\varepsilon+\mu^2=\frac{\rho}{n-1}.$$

Então,

$$\langle\mathrm{R}(e_i,e_j)e_j,e_i\rangle=\frac{\rho}{(n-1)}.$$

Portanto, Ω tem curvatura seccional constante igual a $\dfrac{\rho}{(n-1)}$.

Assim, no subconjunto aberto Ω onde $||\mathrm{T}||>0$, a curvatura seccional é constante $\mathrm{K}_0=\dfrac{\rho}{n-1}$. Se M^n/Ω tem interior vazio, M^n tem curvatura seccional constante K_0. Caso contrário, existe um subconjunto aberto $\Omega_1\subset\mathrm{M}^n/\Omega$, onde $\mathrm{T}\equiv0$. Então Ω_1 tem curvatura seccional constante igual a ε, o que implica $\rho=\varepsilon(n-1)$. Como M^n é uma variedade de Einstein ρ é constante em M^n então $\mathrm{K}_0=\varepsilon$ e a curvatura seccional em $\Omega\cup\Omega_1$ é ε, para qualquer subconjunto aberto Ω_1 onde $\mathrm{T}\equiv0$. Portanto M^n tem curvatura seccional constante igual a ε. ■

Conclusão

Dada uma imersão isométrica $f:\mathrm{M}^n\to\mathbb{Q}^n(\varepsilon)\times\mathbb{R}$, com $n>3$, onde M^n é uma variedade de Einstein. Temos que M^n possui no máximos duas curvaturas principais distintas, uma com multiplicidade $(n-1)$ e outra com multiplicidade 1. Além disso, o autovetor com multiplicidade 1 é dado pela projeção de $\partial_{x_{n+2}}$ sobre $\mathrm{T}_p\mathrm{M}$, $p\in\mathrm{M}^n$. Com isso, M^n possui curvatura seccional constante.

Referências

[1] Celso dos Santos Formigosa. Classificação de hipersuperfícies de einsten em produtos $\mathbb{Q}^n(\epsilon)\times\mathbb{R}$. 41f. dissertação (mestrado), 2022.

[2] Benedito Leandro, Romildo Pina, and João Paulo dos Santos. Einstein hypersurfaces of $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}$. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 52(3):537–546, 2021.

[3] Fernando Manfio and Ruy Tojeiro. Hypersurfaces with constant sectional curvature of $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}$. *Illinois Journal of Mathematics*, 55(1):397–415, 2011.

[4] Sebastián Montiel. Real hypersurfaces of a complex hyperbolic space. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 37(3):515–535, 1985.

[5] Ruy Tojeiro. On a class of hypersurfaces in $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}$. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 41(2):199–209, 2010.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.