A topologia de Zariski e a Álgebra Linear

Carolina Santana Tomaz

Universidade Federal de São Carlos/ Departamento de Matemática

carolinasantana@estudante.ufscar.br

Resumo

Nos primeiros cursos de Álgebra Linear nos parece que a maioria das matrizes são diagonalizáveis, de modo que são exibidos poucos exemplos de matrizes complexas que não o são. Assim, é razoável questionar se tal percepção é verdadeira. Na perspectiva da Geometria Algébrica, por meio da Topologia de Zariski, este trabalho apresenta uma prova da densidade do conjunto das matrizes complexas que são diagonalizáveis, respondendo, assim, afirmativamente a pergunta. Além disso, foi dado um tratamento topológico ao Teorema de Cayley-Hamilton.

A topologia de Zariski

Definição 1. Consideremos o anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ nas variáveis $x_1, \cdots, x_n$ com coeficientes em $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Dado $S \subset \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$, denotamos por

$$Z(S) = \{x \in \mathbb{K}^n; f(x) = 0, \ \forall f \in S\}$$

o conjunto de zeros de S.

Definição 2. Dizemos que um subconjunto $X \subset \mathbb{K}^n$ é fechado se $X = Z(S)$, para algum $S \subset \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$. Desta forma, um subconjunto é dito **aberto** de $\mathbb{K}^n$ se é o complementar de algum fechado.

Corolário 3. *Os subconjuntos abertos de $\mathbb{K}^n$ formam uma topologia, chamada **topologia de Zariski**.*

Lema 4. *Todo aberto não vazio na topologia de Zariski em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto e denso da topologia usual em $\mathbb{R}^n$.*

Definição 5. Dado $S \subset \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$, denotamos por $\langle S \rangle$ o ideal gerado por S em $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$. É possível mostrar que

$$Z(S) = Z(\langle S \rangle).$$

Teorema 6 (Teorema da base de Hilbert)**.** *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Então, todo ideal $\mathcal{I}$ do anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ é gerado por um conjunto finito de polinômios.*

Teorema 7 (Propriedades da topologia de Zariski)**.** *Seja $\mathbb{K}^n$ o espaço afim de dimensão n. Temos:*

a) *Os conjuntos $Z(f)^C$ com $f \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ formam uma base para a topologia de Zariski em $\mathbb{K}^n$.*

b) *Todo aberto na topologia de Zariski é denso.*

c) *Qualquer função $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ que é polinomial em cada coordenada é contínua em relação à topologia de Zariski.*

O conjunto das matrizes diagonalizáveis é aberto e denso

Definição 8. Dado um polinômio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, o **discriminante** de $p(x)$ é dado pela expressão

$$\Delta p = c \prod_{i<j} (r_i - r_j)^2,$$

onde c é uma constante não nula que depende dos coeficientes de $p(x)$ e r_i, r_j é são raízes de $p(x)$.

Teorema 9. *O conjunto $D \subset M_n(\mathbb{C})$ das matrizes diagonalizáveis é denso com respeito à topologia usual em $M_n(\mathbb{C})$.*

Demonstração. Consideremos a função $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ que associa a cada matriz o discriminante do seu polinômio característico.

Sabemos que essa função é polinomial. Note que, o complementar do conjunto $\varphi^{-1}(\{0\})$ consiste de matrizes que só tem autovetores simples e, consequentemente, são diagonalizáveis.

Além disso, o complementar do conjunto $\varphi^{-1}(\{0\})$ é não vazio já que φ não é identicamente nulo.

Pelo Lema anterior, $\varphi^{-1}(\{0\})^C$ é denso relativamente à topologia usual em $M_n(\mathbb{C})$. Mas,

$$\varphi^{-1}(\{0\})^C = D.$$

Portanto, o conjunto D de matrizes diagonalizáveis é denso em $M_n(\mathbb{C})$. □

Uma prova topológica para o Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema 10. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n, com coeficientes num corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **ou** $\mathbb{C}$) e*

$$p_c(x) = det(xI - A) = c_0 + c_1 x + ... + c_{n-1} x^{n-1} + x^n$$

seu polinômio característico. Então

$$p_c(A) = c_0 I + c_1 A + ... + c_{n-1} A^{n-1} + A^n = 0.$$

Demonstração. Vamos dividir o problema em 3 casos.

O casos em que A é uma matriz diagonal ou diagonalízavel são imediatos a partir de resultados de Álgebra Linear.

Se A é uma matriz qualquer, podemos usar a Topologia de Zariski. Para isso, considere a função ϕ que associa a cada matriz A a matriz $p_c(A)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{K}^{n^2} &\longrightarrow \mathbb{K}^{n^2} \\ A &\longmapsto p_c(A) \end{aligned}$$

Seja $D(\Delta)$ o conjunto das matrizes cujo discriminante do polinômio característico é não nulo. Vimos que $D(\Delta)$ é denso na topologia usual de $\mathbb{K}^{n^2}$. Observe que ϕ é polinomial em cada coordenada de A e, portanto, contínua.

Agora, note que, se $A \in D(\Delta)$ então A é diagonalizável e, portanto, $p_c(A) = 0$.

Assim, como $D(\Delta)$ é denso,

$$\phi(A) = p_c(A) = 0,$$

para qualquer matriz A de ordem n. □

Referências

[1] CARDOSO, R. R. M., **Quase todas as matrizes complexas são diagonalizáveis - uma abordagem transdisciplinar**. Dissertação de Mestrado. PROFMAT - SBM. Universidade de Brasília Brasília. 2019.

[2] **Uma prova topológica para o Teorema de Cayley-Hamilton**. LeGauss, 2010. Disponível em: ¡http://legauss.blogspot.com/2010/07/uma-prova-topologica-para-o-teorema-de.html¿. Acesso em março de 2022.

[3] COELHO, Juliana. **Introdução à Geometria Algébrica**. Notas de aula. Universidade Federal Fluminense. 2009.

Agradecimentos

[1]

[1] Este trabalho foi desenvolvido sob orientação da profª Sônia Maria Fernandes no período de setembro/2021 a agosto/2022, e está vinculado ao PIBIC/CNPq da Universidade Federal de Viçosa.