Fluxo Ricci-Harmônico modificado

Carlos Maurício de Sousa

Universidade Federal de São Carlos

carlosmauricio@unir.br

Resumo

O fluxo Ricci-Harmônico modificado generaliza o fluxo introduzido por List [5] e é uma modificação do fluxo Ricci-Harmônico definido por Müller [6]. Freitas Filho [3], em 2017, estudou este fluxo com o objetivo de construir uma classe de sólitons de Ricci m-quasi-Einstein. Nesta exposição será apresentada a definição e a prova da existência e unicidade em tempo curto via truque de DeTurck [1].

Introdução

Aplicações harmônicas são pontos estacionários do fluxo do calor da família de aplicações $\phi(t)$ satisfazendo a equação $\frac{\partial}{\partial t}\phi(t) = \Delta_{g,h}\phi(t)$. Este fluxo inspirou Hamilton a introduzir o fluxo de Ricci em [4] como uma equação do calor não-linear para uma família a um parâmetro de métricas Riemannianas $g(t)$, em uma variedade suave descrito por $\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2\,\mathrm{Ric}_{g(t)}$. Com aplicações à relatividade geral, List [36] definiu o seguinte sistema para uma família $u(t)$ a um parâmetro de funções suaves em M

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2\mathrm{Ric}_{g(t)} + 4du(t) \otimes du(t) \\ \frac{\partial}{\partial t}u(t) = \Delta_{g(t)}u(t). \end{cases}$$

Posteriormente Müller [6] generalizou a ideia de List considerando uma família a um parâmetro de constantes $\theta(t) > 0$, $\phi(t) : (M, g) \to (N, h)$ uma família de aplicação suaves entre variedades Riemanianas com (N, h) mergulhada em $\mathbb{R}^d$ para algum d via mergulho de Nash [7], definindo o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2\mathrm{Ric}_{g(t)} + 2\theta(t)\nabla\phi(t) \otimes \nabla\phi(t) \\ \frac{\partial}{\partial t}\phi(t) = \Delta_{g(t),h}\phi(t) \end{cases}$$

em que $\nabla\phi(t) \otimes \nabla\phi(t) := \phi(t)^*h$.

Existência e unicidade em tempo curto do fluxo

Definição 1. *Sejam M, N variedades suaves e h, ω_N uma métrica Riemanniana e uma 1-forma fixadas em N, respectivamente. Sejam $g(t)$ uma família a um parâmetro de métricas Riemannianas em M e $\phi(t)$ uma família a um parâmetro de aplicações suaves de M em N e considere $\omega(t) := \phi(t)^*\omega_N$. Dizemos que a família $(g(t), \phi(t))$, $t \in [0, \varepsilon)$, é uma solução do fluxo Ricci-Harmônico modificado se satisfaz o seguinte sistema*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2\mathrm{Ric}_{g(t)} + 2\theta\omega(t) \otimes \omega(t), \\ \frac{\partial}{\partial t}\phi(t) = \Delta_{g(t),h}\phi(t), \end{cases} \tag{1}$$

em que $\theta > 0$ é uma constante e $\Delta_{g(t),h}\phi(t)$ é o campo de tensão da aplicação $\phi(t)$ com respeito às métricas $g(t)$ e h.

Definição 2. *Sejam $(M, \bar{g})$ e (N, h) duas variedades Riemannianas compactas fixadas, e ω_N uma 1-forma fixada em N. Sejam $\tilde{g}(t)$ uma família a um parâmetro de métricas Riemannianas em $M, \tilde{\phi}(t)$ uma família a um parâmetro de aplicações suaves de M em N e considere $\tilde{\omega}(t) := \tilde{\phi}(t)^*\omega_N$. Dizemos que a família $(\tilde{g}(t), \tilde{\phi}(t)), t \in [0, \varepsilon)$, é uma solução do fluxo Ricci-Harmônico-DeTurck modificado se satisfaz o seguinte sistema*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) = -2\,\mathrm{Ric}_{\tilde{g}(t)} + 2\theta\tilde{\omega}(t) \otimes \tilde{\omega}(t) - \mathcal{L}_{Z_t}\tilde{g}(t), \\ \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\phi}(t) = \Delta_{\tilde{g}(t),h}\tilde{\phi}(t) - \mathcal{L}_{Z_t}\tilde{\phi}(t), \end{cases} \tag{2}$$

em que $\theta > 0$ é uma constante, $\Delta_{\tilde{g}(t),h}\tilde{\phi}(t)$ é o campo de tensão da aplicação $\tilde{\phi}(t)$ com respeito às métricas $\tilde{g}(t)$ e h e $Z_t = \Delta_{\tilde{g}(t),\bar{g}}\mathrm{Id}_M$ é o campo de tensão da aplicação identidade $\mathrm{Id}_M : M \to M$ com respeito às métricas $\tilde{g}(t)$ e $\bar{g}$.

Proposição 1. *Sejam $(M, \bar{g})$ e (N, h) duas variedades Riemannianas compactas fixadas, e ω_N uma 1-forma fixada em N. Dadas uma métrica Riemanniana g_0 em M e uma aplicação suave $\phi_0 : (M, g_0) \to (N, h)$, existem um número real $\varepsilon > 0$, famílias suaves a um parâmetro de métricas $\tilde{g}(t)$ e aplicações suaves $\tilde{\phi}(t)$, tais que $(\tilde{g}(t), \tilde{\phi}(t)), t \in [0, \varepsilon)$, é uma solução do fluxo Ricci-Harmônico-DeTurck modificado, com dado inicial $(\tilde{g}(0), \tilde{\phi}(0)) = (g_0, \phi_0)$. Além disso, a solução $(\tilde{g}(t), \tilde{\phi}(t)), t \in [0, \varepsilon)$, é única.*

Proposição 2. *Sejam $(\tilde{g}(t), \tilde{\phi}(t)), t \in [0, \varepsilon)$ uma solução do fluxo RicciHarmônico-DeTurck modificado em M e $\varphi_t, t \in [0, \varepsilon)$, uma família a um parâmetro de difeomorfismos de M satisfazendo $\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p) = Z_t|_{\varphi_t(p)}$ para todo $p \in M$. Então $(g(t), \phi(t)), t \in [0, \varepsilon)$, com $g(t) := \varphi_t^*(\tilde{g}(t))$e $\phi(t) := \varphi_t^*(\tilde{\phi}(t))$, é uma solução do fluxo Ricci-Harmônico modificado.*

Resultados

Teorema 1. *Existe um número real $\varepsilon > 0$ e famílias a um parâmetro de métricas Riemannianas $g(t)$ e aplicações suaves $\phi(t)$, tais que $(g(t), \phi(t)), t \in [0, \varepsilon)$, é uma solução do fluxo Ricci-Harmônico modificado com $g(0) = g_0$ e $\phi(0) = \phi_0$. Além disso, a solução $(g(t), \phi(t)), t \in [0, \varepsilon)$, é única.*

Demonstração. (Existência) Pela Proposição 1 existe uma solução $(\tilde{g}(t), \tilde{\phi}(t))$ do fluxo Ricci-Harmônico-DeTurck modificado a qual, como sabemos, está definida em algum intervalo $[0, \varepsilon)$ com $\tilde{g}(0) = g_0$ e $\tilde{\phi}(0) = \phi_0$. Consequentemente, temos o sistema (2) em que $Z_t = \Delta_{\tilde{g}(t),\bar{g}}\,\mathrm{id}_M$. Para cada $p \in M$, denotamos por $\varphi_t(p)$ a solução da EDO $\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p) = Z_t|_{\varphi_t(p)}$ com condição inicial $\varphi_0(p) = p$. Pela Proposição 2. as métricas $g(t) = \varphi_t^*(\tilde{g}(t))$ e aplicações $\phi(t) = \varphi_t^*(\tilde{\phi}(t)), t \in [0, \varepsilon)$, constituem uma solução do fluxo Ricci-Harmônico modificado com $g(0) = g_0$ e $\phi(0) = \phi_0$.

(Unicidade) Suponha que $\left(g^i(t), \phi^i(t)\right), i = 1, 2$, são ambas as soluções do fluxo Ricci-Harmônico modificado, as quais estão definidas no mesmo intervalo $[0, \varepsilon)$, satisfazendo $g^1(0) = g^2(0)$ e $\phi^1(0) = \phi^2(0)$. Queremos deduzir que $\left(g^1(t), \phi^1(t)\right) = \left(g^2(t), \phi^2(t)\right)$ para todo $t \in [0, \varepsilon)$. Provaremos tal fato argumentado por contradição. □

Referências

[1] Dennis M. DeTurck. Deforming metrics in the direction of their ricci tensors. *Journal of Differential Geometry*, 1983.

[2] James Eells and Joseph H Sampson. Harmonic mappings of riemannian manifolds. *American journal of mathematics*, 1964.

[3] Antonio Airton Freitas Filho. Sólitons de ricci com estrutura de produto deformado. *Universidade Federal do Amazonas*, 2017.

[4] Richard S Hamilton. Three-manifolds with positive ricci curvature. *Journal of Differential geometry*, 1982.

[5] B. List. Evolution of an extended Ricci flow system. *Comm. Anal. Geom.*, 16:1007–1048, 2008.

[6] Reto Müller. Ricci flow coupled with harmonic map flow. *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*, 2012.

[7] John Nash. he imbedding problem for riemannian manifolds. *Annals of mathematics*, 1956.