As origens do Problema de Dirichlet e a resolução via o Método Direto de Minimização

Carlos Passarin & Adilson Presoto

Departamento de Matemática - UFSCar

carlos.segantin@estudante.ufscar.br

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

O Princípio de Dirichlet foi apresentado no verão de 1856, como forma de resolver o Problema de Dirichlet. Passearemos por alguns exemplos apresentados na segunda metade do século XIX, que desvelaram descuidos no estabelecimento do princípio. Ainda apresentaremos o Método de Minimização do Cálculo das Variações que possibilita resolver o problema de Dirichlet no espaço de funções adequado.

Introdução

A análise passou por um período de contestações, principalmente devido a Weierstrass, no qual surgiram exemplos que refutavam o princípio. Depois disso, foram desenvolvidos métodos que solucionavam o problema, dentre os quais estava o método de minimização que trataremos ao final.

Objetivos

1. Introduzir o Princípio de Dirichlet original;
2. Exibir os exemplos de Prym e Weierstrass;
3. Utilizar o Método de Minimização para obter solução do problema de Dirichlet.

Resultados

O princípio proposto serviria para solucionar o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } \Omega, \\ u = f \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

transformando o problema de contorno acima no de determinar ponto crítico do funcional de energia

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x, \tag{1}$$

sobre $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, com a restrição $u = f$ sobre $\partial\Omega$.

Vamos verificar que tal ponto crítico, caso exista, é uma solução do problema de contorno dado. De fato, se u_0 é ponto crítico de (1), temos para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\mathcal{I}'(u_0)\varphi = \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{I}(u_0 + t\varphi) - \mathcal{I}(u_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla\varphi \, \mathrm{d}x \,.$$

Assumindo que $u_0 \in C^2(\Omega)$, integramos por partes, obtendo que

$$\mathcal{I}'(u_0)\varphi = \lim_{t\to 0} \int_\Omega \Delta u_0 \varphi \, \mathrm{d}x = 0,$$

se, e somente se, $\Delta u_0 = 0$ em Ω. Com isso vemos que, se fosse sempre possível obter ponto crítico para o funcional energia, encontraríamos uma solução para o problema de Dirichlet.

No entanto, isso nem sempre era possível, já que em espaços gerais, tal mínimo não existe. Abaixo temos os exemplos que explicitaram a falha no Princípio de Dirichlet

Proposição 1 (Teorema 3.3, pág. 69, [1]). *Dada $u \in C^1([-1,1])$, seja*

$$\mathcal{I}(u) = \int_{-1}^{1} \left[x \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x) \right]^2 \mathrm{d}x \,.$$

Então,

$$\inf \left\{ \mathcal{I}(u) : u \in C^1([-1,1]), u(-1) = a, u(1) = b \right\} = 0,$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Em particular, o ínfimo é atingido se, e somente se, $a = b$.

Nesse exemplo, é possível verificar que $u_\varepsilon(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{\arctan(x/\varepsilon)}{\arctan(1/\varepsilon)}$ é uma família minimizante para $\mathcal{I}$. Ou seja, o funcional nem sempre atinge o ínfimo, pois na minimização considerou-se um espaço geral. Isso foi um problema que passou despercebido, por conta da inspiração na Física que permeava a matemática da época.

Outra patologia observada por Prym é o resultado do exemplo a seguir, onde o funcional energia nem mesmo é finito,

Proposição 2 (Teorema 3.4, pág. 71, [1]). *Seja $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ o disco unitário. Existe uma função harmônica u_0 em $C^\infty(B_1(0)) \cap C(\overline{B_1}(0))$ tal que*

$$\mathcal{I}(u_0) = \int_{B_1} |\nabla u_0|^2 \, \mathrm{d}x = +\infty.$$

Fazendo os devidos cálculos, é possível obter que a parte harmônica da função analítica $f(x,y) = i\sqrt{-\ln(R + x + iy)}$ definida no semicírculo de raio $R < \frac{1}{2}$ satisfaz a proposição.

Por fim, apresentamos o teorema de existência de soluções fracas para o problema de Dirichlet com o uso dos espaços de Sobolev.

Definição 1.

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \left\{ f \in L^2(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{n+1}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y < \infty \right\}$$

Definição 2 (Teorema 5.7, pág. 128, [1]). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado suave. Então existe um único operador linear limitado $\mathrm{Tr} : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ tal que $\mathrm{Tr}(v) = v|_{\partial\Omega}$ para toda $v \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$.*

Proposição 3 (Teorema 2, Pg.249, [2]). *Para cada $k = 1, \dots$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Proposição 4 (Proposição 5.3, pág. 121, [1]). *Existe $C > 0$ tal que $||v||_{L^2} \leq C||\nabla v||_{L^2}$, $\forall v \in C^1(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$.*

Proposição 5 (Teorema 5.8-c, pág. 129, [1]). *Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado e suave. Então $\ker \mathrm{Tr} = H_0^1(\Omega)$.*

Teorema 1 (Teorema 5.10, pág. 130, [1]). *Dada $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, então o problema de minimização*

$$m_1 = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x : v \in H^1(\Omega) \text{ e } \mathrm{Tr}(v) = f \right\}$$

admite uma única solução v_0. Além disso, v_0 satisfaz

$$\int_\Omega \nabla v_0 \cdot \nabla\varphi \, \mathrm{d}x = 0, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Demonstração. Como $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, então a classe de funções admissíveis é não vazia. Seja (v_k) uma sequência minimizante. Então, temos $\lim_{i,j\to\infty} ||\nabla v_i - \nabla v_j||_{L^2} = 0$. Sendo $\mathrm{Tr}(v_i - v_j) = 0$, sabemos que $v_i - v_j \in H_0^1(\Omega)$ e segue da desigualdade de Poincaré que

$$\lim_{i,j\to\infty} ||v_i - v_j||_{L^2} = 0.$$

Logo, a sequência $(v_k)_{k\geq 1}$ é de Cauchy em $H^1(\Omega)$ que é completo, então existe v_0 tal que $v_k \to v_0$ em $H^1(\Omega)$. Portanto,

$$\mathrm{Tr}(v_0) = f \text{ e } \int_\Omega |\nabla v_0|^2 \, \mathrm{d}x = m_1.$$

□

Conclusão

Por meio dos estudos desenvolvidos, foi possível compreender a importância do criticismo matemático, que promoveu o surgimento do Cálculo das Variações. O estudo histórico-evolutivo do Princípio de Dirichlet, permitiu a incorporação ao rol de conhecimento teorias que são contemporaneamente usadas no estudo de EDPs.

Referências

[1] Ponce A. C. *Métodos clássicos em Teoria do Potencial*. Publicações Matemáticas. IMPA, Rio do Janeiro, 2009.

[2] Evans L. C. *Partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics; v.19. American Mathematical Society, 2 edition, 2010.

Agradecimentos

Agradeço à agência FAPESP pelo financiamento do projeto, aos presentes pela atenção dedicada e ao Impa pela oportunidade maravilhosa!