Uma conjectura de Ahmadkhah-Zarrin para grupos simples sobre conjuntos conjugados de mesmo tamanho.

Camila Almeida & Igor Lima

Universidade de Brasília

Camilagalmeida09@gmail.com

Resumo

Em um trabalho recente, N.Ahmadkhah e M. Zarrin estudaram o conjunto de classes de conjugação de mesmo tamanho para um grupo G, denotado por $U(G)$. Em geral, $U(G)$ não é suficiente para caracterizar G. No entanto, eles caracterizaram alguns grupos via $U(G)$, isto é, se G é um grupo simples e $S = PSL(3,3)$ ou $S = PSL(2,q)$ com $q \in \{5,7,8,9,17\}$, então $U(G) = U(S)$ se, e somente se, G é isomorfo a S. E eles conjecturaram que se G é um grupo e S é um grupo simples, então $U(G) = U(S)$ se, e somente se, G é isomorfo a S. Neste trabalho, exploraremos propriedades e exemplos do conjunto conjugado de mesmo tamanho e analisamos, com o auxílio do GAP (Group, Algorithms and Programming)

Introdução

Definição 1. Em um grupo G, dois elementos $x, y \in G$ são conjugados se existe um elemento $g \in G$ tal que $gxg^{-1} = y$. Esta relação é uma relação de equivalência e as classes de equivalência desta relação são chamadas classes de conjugação.

Notação. Denotaremos por x^G a classe de conjugação de x em G, ou seja, o conjunto $\{gxg^{-1} | g \in G\}$.

Definição 2 (Vetor Conjugado):. Sejam G um grupo e $n_1 < ... < n_r$ os tamanhos distintos das classes de conjugação de G. Definimos $V(G) = (n_1, ..., n_r)$ como o vetor conjugado de G.

Tomemos o grupo dos quatérnios Q_8 como exemplo. Os tamanhos das classes de conjugação de Q_8 são:
$|1^G| = 1, |(-1)^G| = 1, |i^G| = 2, |(-i)^G| = 2, |j^G| = 2, |(-j)^G| = 2, |k^G| = 2, |(-k)^G| = 2$. Logo, $V(Q_8) = (1, 2)$.

Agora vamos definir nosso outro invariante $U(G)$.

Definição 3 (U(G)). Defina $U(G)$ como o conjunto de tamanhos das uniões das classes de conjugação de mesmos tamanhos, ou seja, se

$$u_G(ni) = |\{x \in G \,|\, |x^G| = ni\}|$$

então

$$U(G) = \{u_G(n_i) \,|\, i \in \{1, 2, \dots, r\}\}.$$

Tomemos novamente o grupo dos quatérnios Q_8 como exemplo. Vamos calcular $u_{Q_8}(1)$ e $u_{Q_8}(2)$. Temos que

$$u_{Q_8}(1) = |\{x \in Q_8 \,|\, |x^G| = 1\}| = 2,$$

$$u_{Q_8}(2) = |\{x \in Q_8 \,|\, |x^G| = 2\}| = 6.$$

Logo, o conjunto das classes de conjugação de mesmo tamanho de Q_8 será: $U(Q_8) = \{2, 6\}$.

A fim de enunciar nossos resultados principais, agora iremos estabelecer algumas definições envolvendo simplicidade de grupos.

Definição 4: $H \leq G$ é normal em G se, e somente se, $gH = \{gh \,|\, h \in H\} = Hg = \{hg \,|\, h \in H\}$, para todo $g \in G$.

Definição 5: G é dito simples se os únicos subgrupos normais de G são: G, $\{e\}$.

Definição 6: **(PSL(n,q))** PSL(n,q) é o quociente de SL(n,q) pelo centro de SL(n,q), onde o centro de SL(n,q) é formado por todas as matrizes escalares de determinante 1.

A seguir, temos um dos teoremas mais importantes sobre a simplicidade de $PSL(n, q)$.

Teorema 1 (Camile Jordan, 1838-1922) PSL(n,q) é simples, exceto para $(n, q) = (2, 2)$ ou $(2, 3)$.

Teorema 2 (Ahmadkhah-Zarrin, 2019) Sejam G um grupo simples e $S = PSL(3, 3)$ ou $PSL(2, q)$, onde $q \in \{5, 7, 8, 9, 17\}$. Então $G \cong S \Leftrightarrow U(G) = U(S)$

Objetivos

1. Estudar propriedades relevantes de $V(G)$ e $U(G)$;
2. Utilizar o software GAP (Group, Algorithms and Programming), para tentar encontrar contraexemplos de algumas conjecturas.

Resultados

Essencialmente o Teorema de Ahmadkhah-Zarrin nos dá uma nova caracterização dos grupos $PSL(3, 3)$ e $PSL(2, q)$, usando somente o invariante $U(G)$. É importante observar que a Conjectura de Ahmadkhah-Zarrin (se provada) estende o resultado de Ahmadkhah-Zarrin para todos os grupos simples (Teorema 2).

Conjectura de Ahmadkhah-Zarrin, 2019. Sejam G um grupo e S um grupo simples. Então $G \cong S \Leftrightarrow U(G) = U(S)$.

Note que isto não é válido para o caso em que G e S não são simples. Ainda que G e S sejam grupos tais que $V(G) = V(S)$ e $U(G) = U(S)$, não é necessariamente verdade que $G \cong S$. Por exemplo, $V(D_8) = V(Q_8) = (1, 2)$ e $V(D_8) = V(Q_8) = 2$, 6, mas $D_8 \ncong Q_8$. Ao longo da execução do plano de trabalho, inicialmente, tentamos verificar se essa conjectura era falsa. Fizemos isso com o auxílio do GAP. Nós testamos para grupos com essa característica com ordem menor que 1024. Também testamos para diversos grupos tipo PSL, dentre outros. Para todos os casos testados no GAP a conjectura permaneceu válida.

Conclusão

O Teorema de Ahmadkhah-Zarrin classifica alguns grupos simples usando somente $U(G)$, a Conjectura de Ahmadkhah-Zarrin é uma extensão natural desses resultados, pois questiona se de fato o teorema vale para quaisquer grupos simples. A importância de estudar esse resultado é que a validade da Conjectura de Ahmadkhah-Zarrin implica em uma nova classificação de grupos simples usando somente o invariante $U(G)$. A Conjectura de Ahmadkhah-Zarrin para grupos simples permanece em aberto. As contas foram efetuadas no GAP usando o nosso algoritmo. Essas contas e a similaridade da Conjectura de J. G. Thompson (já provada), nos leva a induzir que a Conjectura de Ahmadkhah-Zarrin seja verdadeira.

Referências

[1] Zarrin, M.; Ahmadkhah, N. On the set of same-size conjugate classes,2019. Communications in Algebra, 47:10, 3932-3938, DOI: 10.1080/00927872.2019.1572171

Agradecimentos

Agradecimentos à Fundação Universidade de Brasília e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).