O Método de Galerkin aplicado ao estudo de Equações Diferenciais Parciais

Brendo da Costa Silva[1] & Elber Mendes Gonçalves [2]

Universidade Federal do Pará, PPGME
Universidade Federal do Pará, PPGME

brendocostaedm@gmail.com
elbermnds@gmail.com

Resumo

Nosso objetivo é estudar uma classe de Equações Diferencias Parciais, conhecidas na literatura como problemas singulares. A ferramenta básica que utilizaremos para tal estudo será o Método de Galerkin.

Introdução

Estudaremos a existência de solução para a seguinte classe de problemas elípticos singulares:

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = u^{-\alpha} + u^p \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 2$ e $\alpha, p \in (0,1)$.

Uma solução fraca para o problema (P) é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u > 0$ q.t.p. em Ω e satisfaz:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega \left[\frac{\varphi}{u^\alpha} + u^p \varphi\right], \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \qquad (1)$$

A técnica que usaremos para resolver o problema (P) é o método de Galerkin que é fruto de uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, a saber:

Lema 0.1. *(**Fundamental**) Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ uma aplicação contínua tal que $\langle f(x), x\rangle \geq 0$, para todo $x \in \partial B_R(0)$. Então, f possui um ponto fixo em $\overline{B_R(0)}$.*

Teorema 0.1. *Considere $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ uma função tal que $t^{-1}f(t)$ é decrescente para $t > 0$. Se v_1 e v_2 são, respectivamente sub e super-solução do problema $-\Delta v = f(v), v > 0$ em Ω e $v = 0$ sobre $\partial\Omega$, então $v_2 \geq v_1$.*

Existência de solução para o problema (P)

Para cada $\epsilon > 0$ fixo, considere o seguinte problema

$$(P_\epsilon) \qquad \begin{cases} -\Delta u = (\epsilon + |u|)^{-\alpha} + u^p \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Denotemos por $\beta = \{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ uma base ortonormal total para $H_0^1(\Omega)$, $\|\cdot\|$ e $|\cdot|$ as normas usuais de $H_0^1(\Omega)$ e euclidiana, respectivamente. Para cada $m \in \mathbb{N}$ fixemos

$$V_m = [e_1, \ldots, e_m],$$

o subespaço de $H_0^1(\Omega)$ gerado por $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Observe que podemos escrever $v \in V_m$ como

$$v = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m,$$

onde $\|v\| = |\alpha|$. Então, V_m e $\mathbb{R}^m$ são isometricamente isomorfos e portanto, podemos identificar v e α.

Assim, considere a função $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tal que sua j-ésima função coordenada é definida por

$$f_j(\alpha) = \int_\Omega \nabla v \nabla e_j - \int_\Omega \left[\frac{e_j}{(\epsilon + |v|)^\alpha} + e_j v^p\right],$$

onde $j = 1, 2, \ldots, m$.

Afirmamos que f é contínua e existe $R > 0$ tal que $\langle f(x), x\rangle \geq 0, \ \forall x \in \partial B_R(0)$. Logo, pelo Lema 0.1, existe $z_m \in \mathbb{R}^m$ tal que $f(z_m) = 0$ e $|z_m| \leq R$. Assim,

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla e_j - \int_\Omega \left[\frac{e_j}{(\epsilon + |v_m|)^\alpha} + e_j v_m^p\right] = 0, \qquad (2)$$

onde $j = 1, 2, \ldots, m$, $z_m = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$, $v = \sum_{i=1}^m \eta_i e_i$ e $\|v_m\| = |z_m| \leq R$. De (2), obtemos

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \psi - \int_\Omega \left[\frac{\psi}{(\epsilon + |v_m|)^\alpha} + \psi v_m^p\right] = 0, \ \forall \psi \in V_m,$$

com $\|v_m\| \leq R$. Fixando $\Phi \in H_o^1(\Omega)$, temos $\Phi = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i e_i$ com $\|\Phi\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |\alpha_i|^2 < +\infty$. Portanto, $\Phi = \lim_{m\to+\infty} \Psi_m$, onde $\Psi_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \in V_m$.

Observando que $V_m \subseteq V_k$ para $m \leq k$, tem-se

$$\int_\Omega \nabla v_k \nabla \Psi_m - \int_\Omega \left[\frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v_k|)^\alpha} + \Psi_m v_k^p\right] = 0. \qquad (3)$$

Assim, fazendo $k \to +\infty$ em (3), obtemos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_m - \int_\Omega \left[\frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\alpha} + \Psi_m v^p\right] = 0. \qquad (4)$$

Agora, fazendo $m \to +\infty$ em (4), temos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Phi - \int_\Omega \left[\frac{\Phi}{(\epsilon + |v|)^\alpha} + \Phi v^p\right] = 0, \ \forall \Phi \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, a função v é uma solução fraca do problema (P_ϵ).

Considerando $\epsilon_n = \frac{1}{n}$, u_n a solução do problema

$$(P_n) \qquad \begin{cases} -\Delta u_n = \left(\dfrac{1}{n} + u_n\right)^{-\alpha} + u_n^p \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u_n > 0 \text{ em } \Omega, u_n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e escolhendo $\Phi = u_n$ como função teste na equação satisfeita por u_n, obtemos

$$\|u_n\|^2 \leq |\Omega|^\alpha \|u_n\|_{L^1(\Omega)}^{1-\alpha} + |\Omega|^{\frac{1+p}{2}} \|u_n\|_{L^2(\Omega)}^{1+p}.$$

Logo, usando imersão contínua de Sobolev, concluímos que $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Logo, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u_n \to u$ q.t.p. em Ω.

Se definirmos $Z_n = u_n + \frac{1}{n}$ no problema (P_n), obtemos pelo teorema 0.1,

$$Z_n(x) \geq \varphi_1(x), \ \forall x \in \overline{\Omega}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $\varphi_1 > 0$ em Ω é a primeira autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 do problema de autovalor $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Fazendo $n \to +\infty$ na desigualdade acima, concluímos que $med\{x \in \Omega;\ u(x) = 0\} = 0$. Logo, fazendo $n \to +\infty$ na equação satisfeita por Z_n, ficamos com

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi - \int_\Omega \left[\frac{\varphi}{u^\alpha} + u^p \varphi\right] = 0, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \qquad (5)$$

Agora sabemos que para cada $\Psi \in H_0^1(\Omega)$, existe $\phi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\|\phi_n - \Psi\| \to 0$ quando $n \to +\infty$. Logo, pela Desigualdade de Hardy-Sobolev e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_\Omega \left(\frac{\phi_n}{\varphi_1^\alpha} + \varphi_1^p\right) \to \int_\Omega \left(\frac{\Psi}{\varphi_1^\alpha} + \varphi_1^p\right) \qquad (6)$$

Usando $\varphi = \phi_n$ como função teste em (5), as imersões de Sobolev e o fato de $u(x) \geq \varphi_1(x)$ q.t.p. em Ω, segue de (6),

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \Psi - \int_\Omega \left[\frac{\Psi}{u^\alpha} + \Psi u^p\right] = 0, \ \forall \Psi \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja, u é uma solução fraca do problema (P). Usando regularidade elíptica, obtemos $u \in C^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Além disso, não é difícil mostrar que essa solução é única, basta escolher u_1, u_2 satisfazendo (1), escolher $\varphi = u_1 - u_2$ como função teste e usar o fato de que $t^{-\alpha}$ é uma função decrescente em $(0, +\infty)$.

Referências

[1] ALVES, C. O.; TORRES LEDESMA, C.E. Una Introducción a las Ecuaciones Elípticas. Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo - Perú, 2017.

[2] KAVIAN, Otared. Introduction á la théorie des points critiques at applications aux problèmes elliptíques. Springer-Verlag, Heidelberg, 1993.

[3] STUART, Charles A. Existence and approximation of solutions of non-llnear elliptic equations. Mathematische Zeitschrift, v. 147, n. 1, pág. 53-63, 1976.

Agradecimentos

Ao nosso orientador Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos por sua colaboração com o trabalho, ao 34^o Colóquio Nacional de Matemática pela concessão de auxílio financeiro. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de financiamento 001.