Conexões em Fibrados de Spinors

Bernardo Santos Vieira

IMECC-Universidade Estadual de Campinas

b213676@dac.unicamp.br

Resumo

Vamos comentar sobre uma ligação entre os conceitos de conexões em fibrados principais e derivadas covariantes em fibrados vetoriais à partir da noção de fibrados vetoriais associados. Com isso, apresentaremos conceitos básicos da geometria spin, a fim de definir os fibrados de spinors e suas conexões.

Introdução

O conceito de conexão aparece em geometria como uma maneira de diferenciar campos vetoriais numa variedade, ou de verificar se um certo campo vetorial é constante ao longo de uma curva.

Aqui, uma **conexão** num G-fibrado principal $P \to M$ será pensada como uma 1-forma de conexão $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, enquanto uma **conexão** (ou **derivada covariante**) num fibrado vetorial $E \to M$ será um mapa linear

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Omega^1(M, E)$$

satisfazendo $\nabla(f \cdot s) = df \otimes s + f \cdot (\nabla s)$, $f \in C^\infty(M)$ e $s \in \Gamma(E)$.

Conseguimos ligar as duas noções com o uso de fibrados vetoriais associados.

Dado um G-fibrado principal $P \to M$ e uma representação $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ de dimensão finita, consideremos o fibrado vetorial associado $E := P \times_\rho V \to M$.

É sabido que uma conexão ω em P induz uma derivada covariante ∇ em $P \times_\rho V$, que localmente é dada por

$$\nabla_X s = [\, \mathcal{E}(x), X(\tilde{s}) + \rho_*\left(\omega(\mathcal{E}_* X)\right) \cdot \tilde{s}(x) \,] \,, \qquad (1)$$

onde $X \in T_x M$, $\mathcal{E} \in \Gamma(P|_U)$ é seção local e $s = [\, \mathcal{E}, \tilde{s} \,] \in \Gamma(E|_U)$, com $\tilde{s} : U \to V$.

Tal caracterização será utilizada no contexto da geometria spin, uma vez que os principais fibrados de interesse dessa área são fibrados associados.

Álgebras de Clifford e grupo Spin

A **álgebra de Clifford** $\mathrm{C}\ell(\mathbb{R}^n)$ de $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||^2)$ é o quociente

$$\mathrm{C}\ell(\mathbb{R}^n) := T(\mathbb{R}^n)/\langle v \otimes v + ||v||^2 \cdot 1 \,;\, v \in \mathbb{R}^n \rangle \,.$$

O **grupo Spin**(n) é o subgrupo de $\mathrm{C}\ell(\mathbb{R}^n)^*$ dado por

$$\mathrm{Spin}(n) := \{\, v_1 \cdots v_{2k} \,;\, v_j \in \mathbb{R}^n,\ ||v_j||^2 = 1 \,\} \,.$$

Existe recobrimento de duas folhas

$$\xi_0 : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n) \qquad (2)$$

onde para $n \geq 2$ o recobrimento é não trivial, e para $n \geq 3$ o grupo $\mathrm{Spin}(n)$ é o recobrimento universal de $\mathrm{SO}(n)$.

O mapa ξ_0 fornece estrutura de grupo de Lie para $\mathrm{Spin}(n)$ de modo que ξ_0 é difeomorfismo local, e então obtemos isomorfismo de álgebras de Lie

$$\Xi_0 := (\xi_0)_* : \mathfrak{spin}(n) \to \mathfrak{so}(n) \,. \qquad (3)$$

Fibrados de spinors

Seja $E \to M$ fibrado vetorial Riemanniano e orientado de rank n, e considere o fibrado $\mathrm{SO}(n) \dashrightarrow P_{SO}(E) \to M$ das bases ortonormais positivas de E.

Temos que a ação canônica de $\mathrm{SO}(n)$ em $\mathbb{R}^n$ se estende para uma ação $cl : \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{GL}(\mathrm{C}\ell(\mathbb{R}^n))$, e daí definimos o **fibrado de Clifford** de E por

$$\mathrm{C}\ell(E) := P_{SO}(E) \times_{cl} \mathrm{C}\ell(\mathbb{R}^n) \,. \qquad (4)$$

Definição 1. Uma **estrutura spin** em E é um $\mathrm{Spin}(n)$-fibrado principal $P_{Spin}(E)$ com um mapa de fibrados $\xi : P_{Spin}(E) \to P_{SO}(E)$ tal que $\xi(\tilde{p}g) = \xi(\tilde{p}) \cdot \xi_0(g)$, $\tilde{p} \in P_{Spin}(E)$ e $g \in \mathrm{Spin}(n)$.

Isto pode ser caracterizado pelo diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spin}(n) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\xi_0"] & P_{Spin}(E) \arrow[d, "\xi"] \\
\mathrm{SO}(n) \arrow[r, dashed] & P_{SO}(E)
\end{tikzcd}$$

Uma variedade Riemanniana e orientada M com estrutura spin em TM é chamada de **variedade spin**.

Observação 1. Uma estrutura spin em E pode ou não existir. A questão de existência e classificação de estruturas spin são respondidas em termos das suas classes de Stiefel-Whitney.

Definição 2. Seja $E \to M$ com estrutura spin $P_{Spin}(E)$. Um **fibrado de spinors** de E é o fibrado associado

$$S(E) := P_{Spin}(E) \times_\Delta S \,, \qquad (5)$$

onde S é um $\mathrm{C}\ell(\mathbb{R}^n)$-módulo à esquerda, e $\mathrm{Spin}(n) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{GL}(S)$ é obtida pela restrição da ação de módulo $\mathrm{C}\ell(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{End}(S)$. Chamamos as seções do fibrado $S(E)$ de **spinors**.

Tendo uma estrutura spin, podemos definir um mapa de fibrados

$$\lambda : \mathrm{C}\ell(E) \otimes S(E) \to S(E) \,,\ \Phi \otimes \Psi \mapsto \Phi \cdot \Psi \,,$$

chamado de **multiplicação de Clifford**. Nas fibras, tal ação é a ação de módulo $\Delta(\varphi)\psi$, onde $\Phi = [\, p, \varphi \,]$ e $\Psi = [\, \tilde{p}, \psi \,]$, com $\xi(\tilde{p}) = p$.

Conexões em fibrados de spinors

Fixe $E \to M$ um fibrado vetorial com estrutura spin $P_{Spin}(E)$, rank n e $S(E)$ seu fibrado de spinors.

Sejam $X \in \Gamma(TM)$, $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ e $\tilde{\mathcal{E}}$ seções locais de $P_{SO}(E)$ e $P_{Spin}(E)$, respectivamente, $\Phi \in \Gamma(\mathrm{C}\ell(E))$ dado localmente por $\Phi = [\, \mathcal{E}, \varphi \,]$, e $\Psi \in \Gamma(S(E))$ um spinor dado localmente por $\Psi = [\, \tilde{\mathcal{E}}, \psi \,]$.

Dado $\omega \in \Omega^1(P_{SO}(E), \mathfrak{so}(n))$ 1-forma de conexão, podemos definir uma derivada covariante ∇^{cl} em $\mathrm{C}\ell(E)$ por

$$\nabla^{cl}_X \Phi = [\, \mathcal{E}, X(\varphi) + cl_*(\omega(\mathcal{E}_* X)) \cdot \varphi \,] \,, \qquad (6)$$

e também obtemos uma conexão

$$\tilde{\omega} := \Xi_0^{-1}(\xi^* \omega) \in \Omega^1(P_{Spin}(E); \mathfrak{spin}(n)) \,,$$

que induz derivada covariante ∇^S no fibrado de spinors $S(E)$, dada localmente por

$$\nabla^S_X \Psi = [\, \tilde{\mathcal{E}}, X(\psi) + \Delta(\tilde{\omega}(\tilde{\mathcal{E}}_* X)) \cdot \psi \,] \,. \qquad (7)$$

Em particular, se $\tilde{\mathcal{E}}$ é tal que $\xi \circ \tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}$, então conseguimos a seguinte forma local

$$\nabla^S_X \Psi = [\, \tilde{\mathcal{E}}, X(\psi) + \frac{1}{2} \sum_{i<j} \langle \nabla^E_X e_i, e_j \rangle \Delta(e_i \cdot e_j) \cdot \psi \,] \,.$$

Teorema 2. *A derivada covariante ∇^S age como uma derivação com respeito à multiplicação de Clifford, isto é,*

$$\nabla^S(\Phi \cdot \Psi) = (\nabla^{cl}\Phi) \cdot \Psi + \Phi \cdot (\nabla^S \Psi) \,. \qquad (8)$$

Essa abordagem da geometria spin faz parte dos estudos do autor em seu projeto de mestrado sobre as equações e os invariantes de Seiberg-Witten.

Referências

[1] Jean-Pierre Bourguignon, Oussama Hijazi, Jean-Louis Milhorat, Andrei Moroianu, and Sergiu Moroianu. *A spinorial approach to Riemannian and conformal geometry*. EMS, 2015.

[2] Andriy Haydys. Introduction to gauge theory, 2019.

[3] H. Blaine Lawson and Marie-Louise Michelsohn. *Spin Geometry*. Princeton University Press, Princeton, 1990.

[4] John W. Morgan. *The Seiberg-Witten Equations and Applications to the Topology of Smooth Four-Manifolds*. Princeton University Press, 1996.

[5] Loring W Tu. *Differential geometry: connections, curvature, and characteristic classes*. Springer, 2017.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio financeiro da CAPES e sob orientação do Profº Drº Rafael de Freitas Leão.