Reconhecimento de padrões

Eduardo Wagner – FGV – Escola de Matemática Aplicada

Reconhecer o padrão de algo que se repete é importante para resolver inúmeros problemas interessantes e, alguns dos que abordaremos, foram retirados de exames vestibulares recentes. Passemos aos problemas.

Problema 1
O clube dos apaixonados por Pitágoras possui, em sua sede, um muro comprido onde foi desenhada a faixa decorativa que mostramos a seguir:

PITAGORASPITAGORASPITAGORASPITAG...

Qual é a 400ª letra dessa faixa?

Solução

O padrão **PITAGORAS** possui 9 letras. Dividindo 400 por 9 encontramos quociente 44 e resto 4. Portanto, há 44 padrões completos e mais 4 letras do padrão seguinte. Logo, a 400ª letra da faixa é **A.**

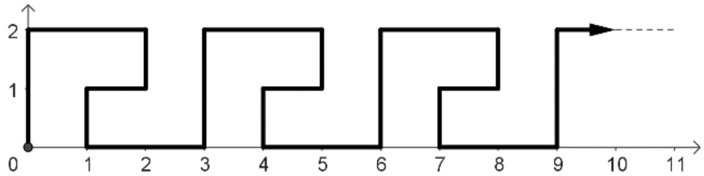
Problema 2
Certa máquina funciona todos os dias da semana e deve receber manutenção a cada 25 dias de uso. Um dia de manutenção da máquina é também um dia de trabalho. A máquina foi instalada, recebeu a manutenção inicial e começou a funcionar em uma terça-feira.
Em que dia da semana ocorreu a 100ª manutenção?

Solução
Observe que $25 = 3\times7 + 4$. Isso significa que, a partir de um dia de manutenção, contamos 3 semanas inteiras mais 4 dias para obter o dia da semana da manutenção seguinte. Portanto, se a primeira manutenção ocorreu em uma 3ª feira, a segunda manutenção ocorreu em um sábado.
Podemos, então, organizar uma sequência das manutenções relacionando cada uma com o dia da semana que será realizada.

Manutenções	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
Dias da semana	**3ª**	S	4ª	D	5ª	2ª	6ª	**3ª**	S	4ª	D	...

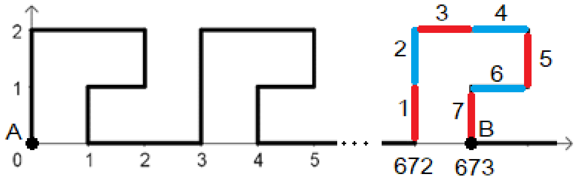
Como a semana tem 7 dias, a cada grupo de 7 dias de manutenção o padrão dos dias da semana se repete. Percebemos, então que cada vez que o número da manutenção é múltiplo de 7 ela cai em uma 6ª feira.
O múltiplo de 7 mais próximo de 100 é 98 e, portanto, a manutenção de número 98 será realizada em uma 6ª feira. Seguindo a sequência da tabela acima, a manutenção de número 100 será realizada em um sábado.

Problema 3
A figura abaixo mostra uma faixa decorativa da época dos antigos romanos, na forma de uma linha poligonal com padrão determinado e desenhada no plano cartesiano.



Sobre essa poligonal, a partir do ponto A(0, 0), foram percorridas 2023 unidades chegando-se ao ponto B. Determine as coordenadas do ponto B.

Solução
O padrão tem comprimento de 9 unidades, começando e terminando nos pontos do eixo X cujas abscissas são números múltiplos de 3.
Como 2023÷9 dá quociente 224 e resto 7, concluímos que o ponto B está 7 unidades após o ponto (224x3=672, 0). Logo, B é o ponto (673, 0).



Problema 4

(Ufrgs 2015) O algarismo das unidades de $9^{99} - 4^{44}$ é

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

Solução

Vamos investigar o algarismo da unidade de $3^{198} - 2^{88}$, que é equivalente à expressão dada, usando uma tabela com potências de 3 e de 2. Note que o padrão do algarismo da unidade de cada uma dessas potências se repete de 4 em quatro.

$3^1 = 3$	$2^1 = 2$
$3^2 = 9$	$2^2 = 4$
$3^3 = 27$	$2^3 = 8$
$3^4 = 81$	$2^4 = 16$
$3^5 = 243$	$2^5 = 32$
$3^6 = 729$	$2^6 = 64$
$3^7 = 2187$	$2^7 = 128$
$3^8 = 6561$	$2^8 = 256$
$\vdots$	$\vdots$

Como 196 é o maior número menor do que 198 que é divisível por 4, 3^{196} termina em 1 e, portanto, 3^{198} termina em 9. No caso de 2^{88}, como 88 é divisível por 4, então o algarismo da unidade de 2^{88} será 6. A diferença entre números com algarismo da unidade iguais a 9 e 6 terá algarismo da unidade igual a 3 (alternativa C).

Problema 5

(FGV-2022) Considere a sequência definida por:

- $a_1 = 1$
- $a_2 = 2$
- $a_3 = 3$
- $a_n = a_{n-3} + a_{n-1}$, para todo inteiro $n \geq 4$.
  a) a_{2022} é par ou ímpar? Justifique sua resposta.
  b) E a_{2023}? Justifique sua resposta.

Solução

Representando par e ímpar por "P" e "I", respectivamente, tem-se que as paridades dos termos da sequência são definidas pelas paridades dos três primeiros termos, a saber, I, P, I.

Tem-se então a sequência:

I, **P**, **I**, P, P, I, I, **I**, **P**, **I**, P, P, I, I, **I**, **P**, **I**, P, P, I, I, **I, P, I**...

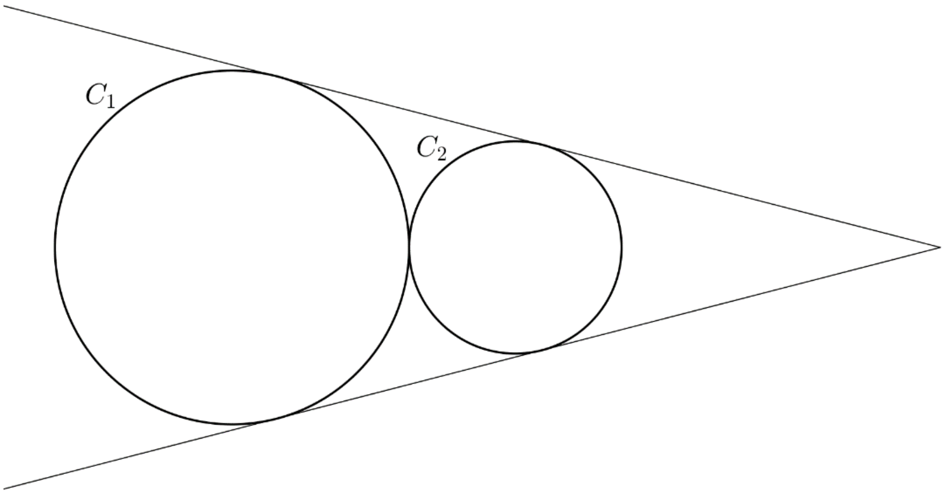
Como se vê, as paridades se repetem de 7 em 7.

Assim, como $2022 = 7 \times 288 + 6$, a paridade do termo a_{2022} é a mesma do sexto termo da sequência I, P, I, P, P, I, I, ou seja, "I" (ímpar).

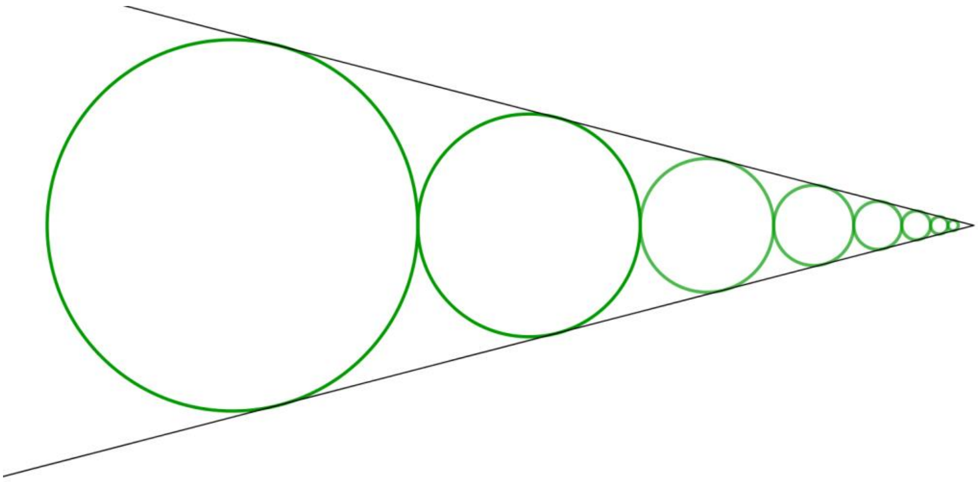
Como $2023 = 7 \times 289$, a paridade do termo a_{2023} é a mesma do sétimo termo da mesma sequência, ou seja, "I" (ímpar).

Problema 6

A circunferência C_1 tem raio $r_1 = a$ e é tangente aos dois lados de um ângulo dado. A circunferência C_2 tem raio $r_2 = b$ $(b < a)$ e é tangente aos dois lados do ângulo dado e é tangente a C_1 como mostra a figura a seguir.



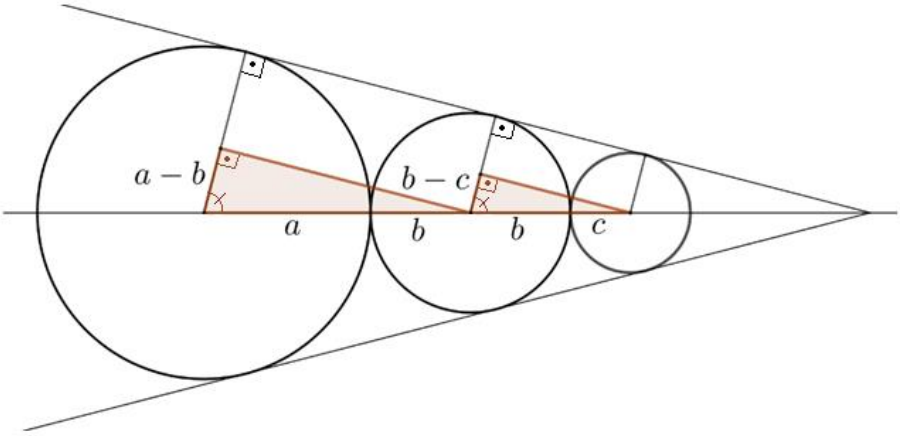
Considere, então a sequência de circunferências $C_1, C_2, C_3, \cdots$, onde cada nova circunferência é tangente aos dois lados do ângulo e tangente à circunferência anterior. Qual é o raio da circunferência C_n?



Solução

Sejam a, b e c os raios de três circunferências consecutivas da sequência.

Considere a construção a seguir:



Da semelhança dos triângulos sombreados, temos

$$\frac{a+b}{b+c}=\frac{a-b}{b-c}$$

Desenvolvendo, encontramos a relação $b^2 = ac$, o que mostra que a sequência dos raios das circunferências forma uma progressão geométrica.
A razão da progressão é

$$q=\frac{r_2}{r_1}=\frac{b}{a}$$

Então, o raio da circunferência C_n é,

$$r_n = r_1 \cdot q^{n-1} = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} = \frac{ab^{n-1}}{a^{n-1}} = \frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}$$

Problema 7

São dadas n retas em um plano em posição geral (não há duas paralelas nem 3 que passam no mesmo ponto).

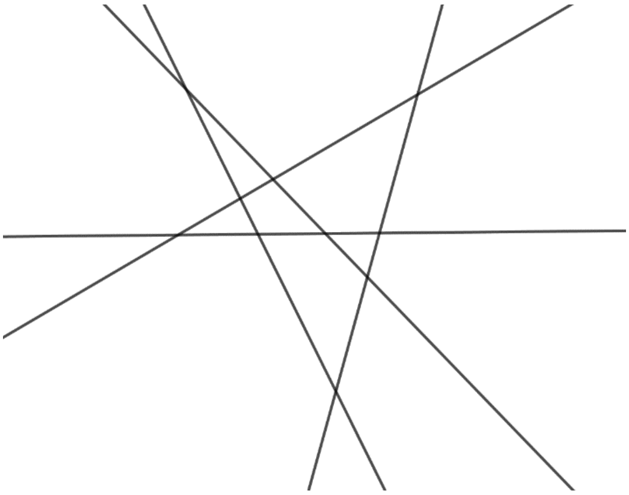
Em quantas regiões o plano ficou dividido?

Solução

Seja R_n o número de regiões em que o plano ficou dividido por n retas em posição geral.

É fácil encontrar os primeiros termos dessa sequência:

n	0	1	2	3	4	5
R_n	1	2	4	7	11	16



Para $n = 5$ você pode contar as 16 regiões.

Suponha que $n - 1$ retas estão desenhadas: $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$ O que acontece quando se desenha a reta r_n?

A reta r_n corta as $n - 1$ retas anteriores em pontos distintos e, dessa forma, seus $n - 1$ pontos dividem essa reta em n partes. Como cada uma dessas partes divide uma região anterior em duas, ao desenhar a reta r_n o número de regiões anteriores foi aumentado de n, ou seja.

$$R_n = R_{n-1} + n$$

Com essa recorrência podemos escrever quantos elementos da sequência quanto quisermos.

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	**2**	**4**	**7**	**11**	**16**	**22**	**29**	**37**	**46**	**56**

Para encontrar uma fórmula para R_n podemos fazer o seguinte:

$$R_0 = 1$$

$$R_1 = R_0 + 1$$

$$R_2 = R_1 + 2$$

$$R_3 = R_2 + 3$$

$$\cdots$$

$$R_n = R_{n-1} + n$$

Somando tudo, obtemos

$$R_n = 1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

$$R_n = 1 + \frac{(1+n)n}{2}$$

$$R_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$