Funções Exponenciais e Logarítimicas

Paulo Cezar Pinto Carvalho – EMAp/FGV

Consideremos o seguinte problema

Uma piscina tem capacidade para 100m^3 de água. Quando a piscina está completamente cheia, é colocado 1 kg de cloro na piscina. Água pura (sem cloro) continua a ser colocada na piscina a uma vazão constante, sendo o excesso de água eliminado por uma tubulação de saída. Depois de 1 hora, um teste revela que ainda restam 900 g de cloro na piscina.

a) **Que quantidade de cloro restará na piscina 10 horas após sua colocação?**
b) **E após meia hora de aplicação?**
c) **E após *t* horas?**

Uma resposta muitas vezes dada para a primeira pergunta é que, após 10 horas, não há mais cloro na piscina. Essa resposta resulta da aplicação do modelo mais simples de variação de uma grandeza, expresso por uma função afim. Segundo esse modelo, a variação sofrida em cada intervalo de 1 hora é sempre a mesma. Assim, se na primeira hora foram eliminados 100 g de cloro, o mesmo deveria ocorrer em cada uma das 10 horas seguintes, fazendo com que todo o cloro seja eliminado nestas 10 horas. O gráfico da Figura 1 ilustra esse raciocínio.

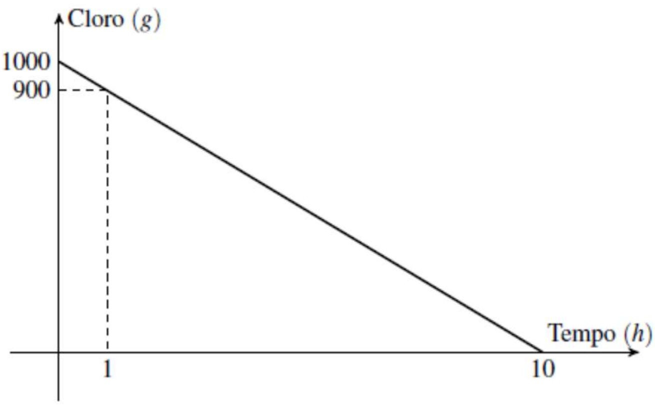

Figura 1

A solução acima, entretanto, não está correta. Não é razoável admitir-se que a eliminação de cloro dê-se a uma taxa constante. De fato, é muito mais razoável que essa taxa dependa da quantidade de cloro, mais cloro é eliminado por unidade de tempo. Na verdade, parece intuitivo que a quantidade eliminada por unidade de tempo seja *proporcional* à quantidade existente de cloro. Para verificarmos essa conjetura, utilizaremos um recurso frequentemente empregado para analisar problemas envolvendo grandezas que variam continuamente: vamos *discretizar* o problema. Ao invés de considerar que a água ingressa na piscina e é dela eliminada de modo contínuo, vamos dividir o tempo em pequenos intervalos de comprimento Δt e imaginar que, em cada um destes intervalos, o processo ocorra da forma descrita a seguir. Primeiro, ingressa na piscina, cujo volume representaremos por V, uma quantidade de água pura igual a $v\Delta t$, onde v é a vazão (expressa, por exemplo, em m^3 por hora); essa água é adicionada à mistura existente de cloro e água. A seguir, um volume igual a $v\Delta t$ é retirado da mistura, restaurando o volume inicial (veja a Figura 2).

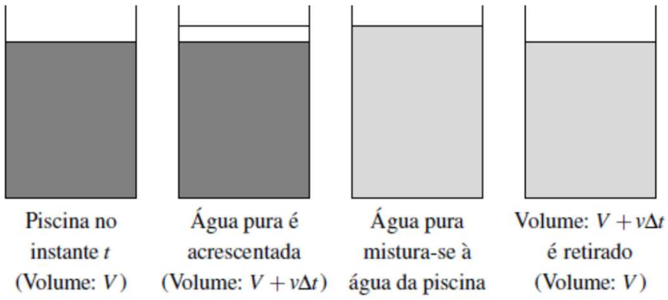

Figura 2

Vejamos o que ocorre com a quantidade $c(t)$ de cloro em cada um desses intervalos. No início do processo, essa massa está uniformemente distribuída em um volume V de líquido. Após o ingresso de água pura, a quantidade de cloro não se altera, mas passa a estar distribuída em um volume igual a $V + v\Delta t$. Desse volume, retira-se $v\Delta t$, retendo-se um volume igual a V. Como o cloro está distribuído uniformemente, a quantidade de cloro que permanece na piscina é proporcional ao volume retido. Isto é, temos, o seguinte quadro:

	Volume de líquido	Quantidade de cloro
Antes da saída	$V + v\Delta t$	$C(t)$
Depois da saída	V	?

O valor desconhecido é, então, dado por $c(t+\Delta t) = c(t)\frac{V}{V+v\Delta t}$. O mais importante a observar é que a fração $\frac{V}{V+v\Delta t}$ é constante para cada intervalo de comprimento Δt. Assim, em cada um desses intervalos, a quantidade de cloro é multiplicada por um valor constante. Note que o mesmo ocorrerá em um intervalo maior, formado pela justaposição de n intervalos de comprimento Δt: a quantidade de cloro, após decorrido um intervalo de tamanho $n\Delta t$, é multiplicada por $\left(\frac{V}{V+v\Delta t}\right)^n$. A variação da quantidade

Estrada Dona Castorina, 110 Jardim Botânico - CEP 22460-320 Rio de Janeiro, RJ - Brasil Phone: +55 21 2529-5275
www.impa.br

de cloro, por sua vez, é obtida da equação acima subtraindo-se a quantidade inicial $c(t)$ em cada lado, o que fornece

$$c(t+\Delta t) - c(t) = c(t)\left(\frac{V}{V+v\Delta t} - 1\right) = c(t)\left(-\frac{v\Delta t}{V+v\Delta t}\right)$$

Uma outra forma de expressar o mesmo fato é dizer que a variação relativa $\frac{c(t+\Delta t)-c(t)}{c(t)}$ é constante e igual a $-\frac{v\Delta t}{V+v\Delta t}$. Isso confirma o comportamento que tínhamos intuído anteriormente: a variação da quantidade de cloro em intervalos de mesmo comprimento é proporcional à quantidade existente no início do intervalo.

Voltemos ao nosso problema. A análise acima mostra a inadequação da primeira tentativa de solução e aponta a solução correta. A perda de cloro, nos períodos consecutivos de 1 hora, não é a mesma. O que é constante, em cada um desses períodos, é a variação relativa: se 10% do cloro foi eliminado na primeira hora, o mesmo ocorre em cada hora a seguir. Equivalentemente, se 90% do cloro permanece após a primeira hora, o mesmo ocorre em cada hora a seguir. Logo, após 10 horas da aplicação, a quantidade de cloro terá sido multiplicada por $0{,}9^{10} \approx 0{,}349$. Portanto, nesse instante haverá 349 gramas de cloro na piscina. De modo geral, podemos expressar a quantidade de cloro ao final de *n* horas (onde *n* é natural) por:

$$c(n) = 1000 \cdot 0{,}9^n, \text{ para } n = 0,1,2,\ldots$$

A Figura 3 ilustra esse comportamento.

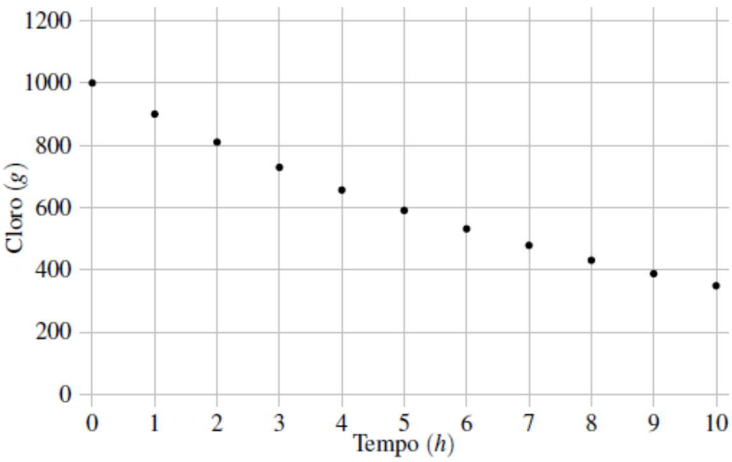

Figura 3

Observe que essas quantidades formam uma progressão geométrica. Na verdade, ao se considerar a quantidade de cloro em instantes igualmente espaçados, obtém-se sempre uma progressão geométrica, já que aquela quantidade é multiplicada pela mesma constante em cada intervalo. Podemos usar esse fato para responder à segunda pergunta do problema, subdividindo o período de uma hora após a aplicação de cloro em dois períodos de meia hora cada. Em cada um desses períodos, a quantidade de cloro é multiplicada por uma constante k (Figura 4). Como ao final dos dois períodos de meia hora a quantidade de cloro é multiplicada por 0,9, temos $k \cdot k = 0{,}9$ e, daí, $k = \sqrt{0{,}9} \approx$ 0,948. Logo, a quantidade de cloro após meia hora é aproximadamente $1000 \cdot 0{,}948 =$ 948 g. Note que, se tivéssemos usado o modelo afim da Figura 1, teríamos obtido 950 g para a quantidade de cloro nesse instante.

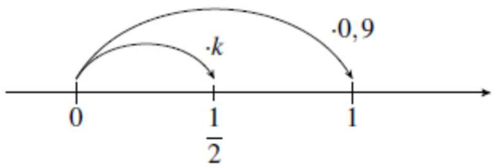

Figura 4

Podemos generalizar a solução acima e calcular a quantidade de cloro a intervalos constantes de meia hora. De fato, para um instante da forma $t = \frac{1}{2}n$, com n natural, temos $c(t) = c\left(\frac{1}{2}n\right) = c(0)$, onde k é a constante calculada acima. Assim,

$c(t) = 1000\left(\sqrt{0{,}9}\right)^n = 1000 \cdot 0{,}9^{\frac{n}{2}}$, para $n = 0{,}1,\ 2,$,,,

Novamente, esses valores formam uma progressão geométrica, ilustrada na Figura 5. Essa progressão é obtida a partir da progressão da Figura 3 “interpolando um meio geométrico” entre cada par de termos consecutivos.

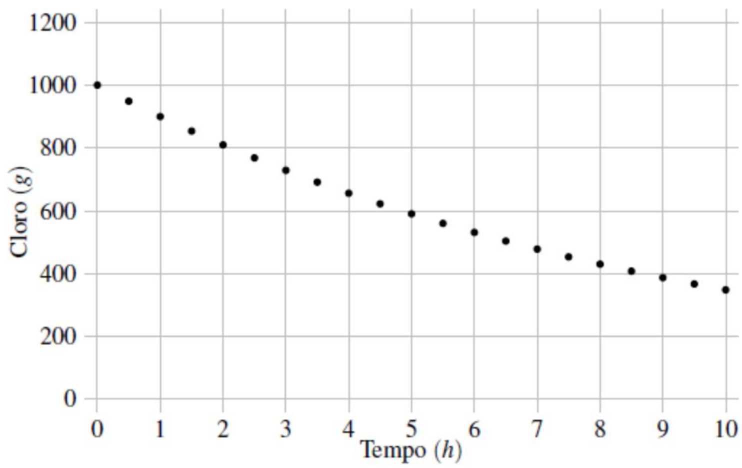

Figura 5

Observe que, substituindo $\frac{n}{2}$ por t, temos $c(t) = 1000 \cdot 0{,}9^t$ para todo t da forma $\frac{n}{2}$. Na verdade, podemos mostrar que a expressão acima vale para todo t racional, aplicando o mesmo processo acima. De fato, seja $t = \frac{p}{q}$. Como o intervalo $[0, t]$ é formado pela justaposição de p intervalos de comprimento $\frac{1}{q}$, a quantidade de cloro restante nesse instante é dada por $c\left(\frac{p}{q}\right) = c(0)k^p$, onde k é a constante pela qual a quantidade de cloro é multiplicada em intervalos de tempo de comprimento $\frac{1}{q}$. Mas q desses intervalos formam um intervalo de comprimento 1, em que $c(t)$ é multiplicado por 0,9. Assim, $k^q = 0{,}9$ e $k = 0{,}9^{\frac{1}{q}}$ (veja a Figura 6).

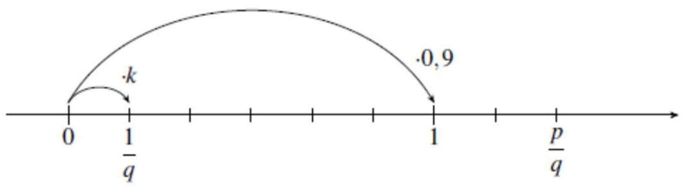

Figura 6

Substituindo na equação acima, obtemos

$$c(t) = c\left(\frac{p}{q}\right) = c(0) \cdot \left(0{,}9^{\frac{1}{q}}\right)^p = c(0) \cdot 0{,}9^{\frac{p}{q}} = c(0) \cdot 0{,}9^t$$

E para valores irracionais de t? A resposta é que todo t irracional pode ser aproximado, com precisão arbitrária, por valores racionais. Os valores correspondentes de c fornecem, por sua vez, aproximações para $c(t)$. Esse é exatamente o mecanismo através do qual se define uma função exponencial, como veremos mais adiante. Assim, a função que fornece a quantidade de cloro que resta no instante t é dada por $c(t) = 1000 \cdot 0{,}9^t$, para todo t real. O gráfico dessa função é dado na Figura 7.

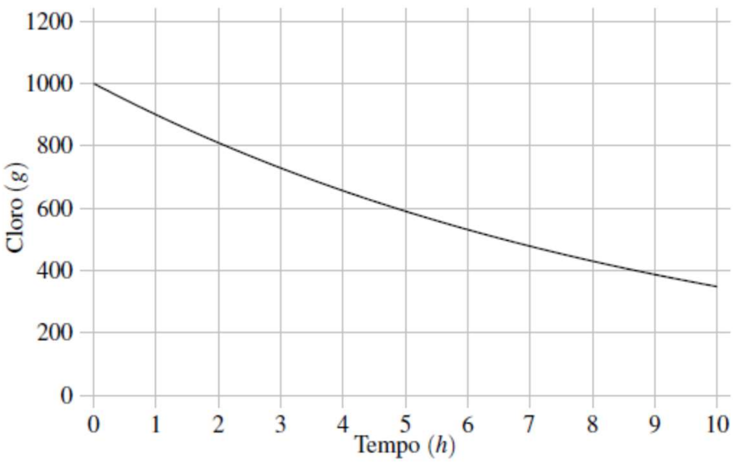

Figura 7

O exemplo acima ilustra um modelo matemático de variação que é tão importante quanto o modelo dado por uma função afim. As situações em que ele se aplica são aquelas em que, em vez de a variação absoluta $f(x+h)-f(x)$ não depender de x (depender, portanto, apenas de h), quem tem essa propriedade é a variação relativa $\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}$. Funções crescentes (ou decrescentes) com essa propriedade são necessariamente da forma $f(x) = ba^x$. Os valores de a e b, a exemplo do que ocorre nas funções afins, podem ser facilmente interpretados em termos dos valores de f nos pontos $x = 0$ e $x = 1$. Temos $f(0) = b \cdot a^0 = b$. Logo, b corresponde ao *valor inicial* $f(0)$. Já no ponto $x = 1$, temos $f(1) = b \cdot a^1 = f(0)a$. Portanto, $a = f(1)/f(0)$ e corresponde à constante pela qual f é multiplicada em todo intervalo de comprimento 1.

Em resumo, temos o teorema abaixo, discutido em mais detalhes em *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 1.

Teorema. *Seja* $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ *uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para cada x e h, a variação relativa* $[f(x+h)-f(x)]/f(x)$ *(ou, equivalentemente, a razão* $f(x+h)/f(x)$*) depende apenas de h e não de x. Então, se* $b = f(0)$ *e* $a = f(1)/f(0)$*, tem-se* $f(x) = ba^x$ *para todo* $x \in \mathrm{R}$.

Voltando ao problema inicial, **quanto tempo deve transcorrer para que a quantidade de cloro na piscina reduza-se à metade?** Como vimos, a quantidade de cloro no instante t é dada por $c(t) = 1000 \cdot 0{,}9^t$. Logo, o instante t em que esta quantidade reduz-se à metade satisfaz a equação $500 = 1000 \cdot 0{,}9^t$, ou seja, $0{,}9^t = 0{,}5$. Como resolver essa equação? Existe um tal valor de t?

Para responder a essas perguntas, precisamos olhar com mais cuidado as propriedades das *funções exponenciais* (para maiores detalhes veja *A Matemática do Ensino Médio*, Vol. 1). Lembramos que uma função exponencial de base a (onde $a > 0$ e $a \neq 1$) é uma função $f : \mathrm{R} \to (0, +\infty)$ definida por $f(x) = a^x$. Uma função exponencial goza das seguintes propriedades:

a) $f(x+y) = f(x)f(y)$ para quaisquer x e y;
b) $f(rx) = f(x)^r$, para quaisquer r e x;
c) f é *crescente* (isto é, $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$) quando $a > 1$ e é *decrescente* (isto é, $x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$) quando $a < 1$; em consequência, f é sempre *injetiva*, ou seja, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
d) f é *contínua*;
e) se $a > 1$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; se $0 < a < 1$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$;
f) f é *sobrejetiva*; ou seja, para todo $y > 0$ existe x tal que $a^x = y$.

A Figura 8 mostra o gráfico de $f(x) = a^x$ nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$

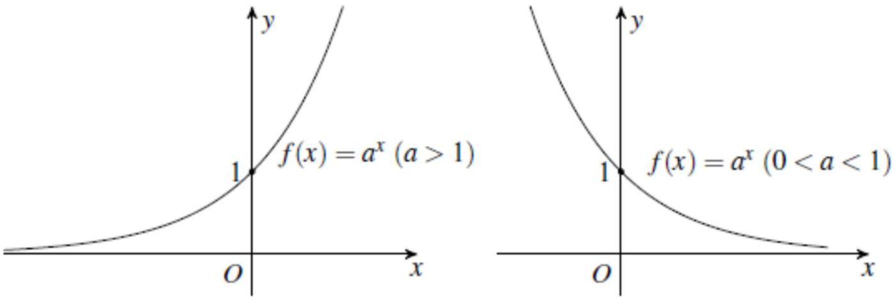

Figura 8

Podemos voltar agora à pergunta que abriu esta discussão ("existe um valor real de x para o qual $0{,}9^x = 0{,}5$?") e respondê-la afirmativamente. Como as funções exponenciais (em particular, a de base 0,9) são injetivas e têm por imagem o conjunto dos reais positivos, existe exatamente um número real x tal que $0{,}9^x = 0{,}5$ (veja a Figura 10).

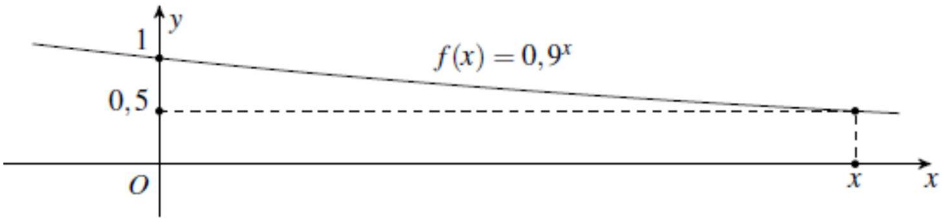

Figura 10

De modo geral, dado um número $y > 0$, o único real x tal que $a^x = y$ (onde $y > 0$) é chamado logaritmo de y na base a e representado por $\log_a y$. A *função logarítmica* de base a, que associa a cada número real positivo o seu logaritmo na base a, é, portanto, a *inversa* da função exponencial de base a, e suas propriedades decorrem das propriedades da exponencial.

Assim, a função $\log_a : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades (veja os gráficos da Figura 10):

a) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, para quaisquer $x, y > 0$.
b) $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$, para qualquer r e qualquer $x > 0$.
c) $\log_a(a^x) = x$, para todo x, e $a^{\log_a x} = x$, para todo $x > 0$.
d) $\log_a$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.
e) se $a > 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$; se $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$
f) $\log_a$ é injetiva e sobrejetiva.

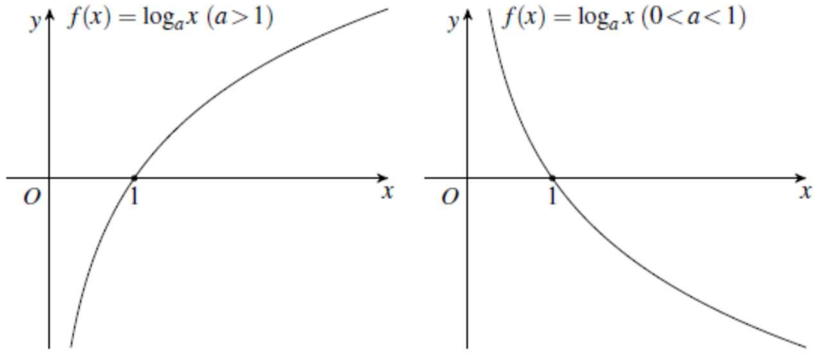

Figura 10

Assim, para determinar o instante em que a quantidade de cloro na piscina reduz-se à metade, precisamos obter $\log_{0,9} 0{,}5$. Como obter esse valor? Há algumas décadas, a resposta seria consultar uma *tabela de logaritmos*, que eram usadas não só para obter a resposta a problemas como esses, mas também para facilitar cálculos, explorando o fato de que *logaritmos* transformam produtos em somas. Hoje em dia, é mais provável que a resposta seja obtida com uma *calculadora científica*.

Em ambos os casos, o usuário de primeira viagem depara-se com uma dificuldade: não há tabelas de logaritmos na base 0,9, nem teclas na calculadora para calcular tais logaritmos. As bases em que valores de logaritmos estão usualmente tabeladas ou disponíveis em calculadoras são as bases 10 e *e* (a base dos logaritmos naturais ou neperianos). Mas, na verdade, qualquer base de logaritmos pode ser usada para calcular um logaritmo em qualquer outra base. De fato, como vimos, $\log_{0,9} 0{,}5$ é a solução da equação $0{,}9^x = 0{,}5$. Aplicando as propriedades dos logaritmos em uma base qualquer *a*, temos, sucessivamente

$$\log_a 0{,}9^x = \log_a 0{,}5$$

$$x \log_a 0{,}9 = \log_a 0{,}5$$

$$x = \frac{\log_a 0{,}5}{\log_a 0{,}9}$$

Se usarmos logaritmos na base 10, obtemos

$$x = \frac{\log_{10} 0{,}5}{\log_{10} 0{,}9} \approx \frac{-0{,}30103}{-0{,}04576} \approx 6{,}57881$$

Se preferirmos logaritmos na base *e*, resulta

$$x = \frac{\log_e 0{,}5}{\log_e 0{,}9} \approx \frac{-0{,}69315}{-0{,}10356} \approx 6{,}57881$$

A resposta, naturalmente, é a mesma: são necessárias 6,57881 horas (aproximadamente 6 horas e 35 minutos) para que a quantidade de cloro se reduza à metade.

Na discussão acima, concluímos que $\log_{0,9} 0{,}5 = \frac{\log_a 0{,}5}{\log_a 0{,}9}$, onde a é qualquer real positivo e diferente de 1. De modo geral

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

para quaisquer números positivos a, b, x (com $a \neq 1$ e $b \neq 1$).

Essa última identidade é bem conhecida como a "*fórmula de mudança de base*" dos logaritmos. O que não é muito destacado é que ela mostra que duas funções logarítmicas quaisquer são sempre múltiplas uma da outra. De fato, a fórmula diz-nos que $\log_b x = k \log_a x$, onde a constante k é igual a $1/\log_a b$. A Figura 11 ilustra esse fato.

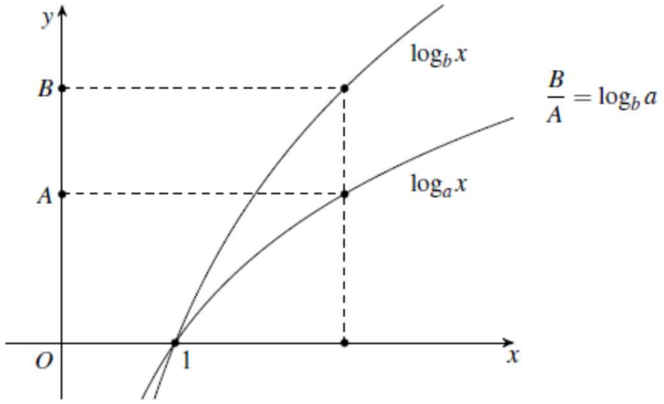

Figura 11

Da mesma forma, as funções exponenciais também estão todas relacionadas entre si. De fato, se a e b são números positivos e diferentes de 1, temos

$$a^x = b^{\log_b a^x} = b^{(\log_b a)x}$$

Logo, existe uma constante $k = \log_b a$ tal que

$$a^x = b^{kx}$$

Portanto, a exemplo do que ocorre com os logaritmos, quando trabalhamos com funções exponenciais podemos sempre expressá-las usando nossas bases favoritas. Na maior parte dos casos, preferimos trabalhar com a base e, pelas razões explicadas a seguir. Assim, em vez de caracterizarmos as *funções do tipo exponencial* como sendo aquelas da forma $f(x) = ba^x$, poderíamos, equivalentemente, caracterizá-las como sendo da forma $f(x) = be^{kx}$.

A preferência pela base e deve-se ao fato de que o coeficiente k na expressão be^{kx} tem uma importante interpretação. Como vimos, funções do tipo exponencial têm a propriedade fundamental de que sua variação relativa em intervalos de comprimento constante é constante. Em particular, sua taxa de variação instantânea (que é o valor da derivada da função no instante considerado) é proporcional ao seu valor naquele instante. Mas a função derivada de $f(x) = be^{kx}$ é $f'(x) = bke^{kx} = kf'(x)$. Portanto, $k = \frac{f'(x)}{f(x)}$ para todo x. Ou seja, k é a razão constante entre o valor da taxa de variação instantânea de uma função do tipo exponencial e o seu valor no ponto considerado.

Voltando ao problema inicial, podemos agora perguntar: **qual é a taxa instantânea de escoamento de cloro no instante inicial?**

Para responder à pergunta, basta reescrever a função $f(t) = 1000\ 0{,}9^t$, que fornece a quantidade de cloro no instante t, na forma $f(t) = be^{kt}$.

Repetindo o processo acima, temos

$$0{,}9^t = e^{\log_e 0{,}9^t} = e^{(\log_e 0{,}9)t} = e^{-0{,}1053t}$$

Logo, $c(t) = 1000 \cdot e^{-0{,}10536t}$.

A taxa de variação de cloro no instante inicial é obtida multiplicando a quantidade então existente (1000) multiplicada pela constante k (igual a $-0{,}10536$). Logo, o cloro está se escoando à taxa instantânea de 105 g por hora. Note que isso não significa que 105 g de cloro serão eliminadas na primeira hora, pois a taxa instantânea não é constante, mas decresce à medida que cloro é eliminado. Na verdade, conforme os dados do problema, são eliminados 100 g de cloro, um pouco menos do que se a taxa de eliminação se mantivesse constante em 105 g por hora.