Mágicas com Combinatória na sala de aula

Prof. Pedro Malagutti

pedro.malagutti0@gmail.com

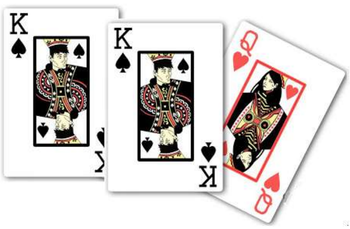
Departamento de Matemática UFSCar

INTRODUÇÃO

Nesta aula serão apresentados alguns números de magia envolvendo Análise Combinatória. Serão desenvolvidas também algumas atividades práticas, com o apoio de materiais concretos, para iniciar a exploração de processos de contagem não usuais e para a prova de impossibilidades feitas com a ajuda de alguns teoremas básicos sobre grupos de permutações. O objetivo principal é abrir caminhos para estudos mais avançados acerca da Teoria dos Grupos e suas aplicações, sem contanto fugir de conhecimentos tradicionalmente estudados no Ensino Médio.

Pretendemos com isso fornecer ao professor de Matemática alguns instrumentos pedagógicos novos para o ensino de Combinatória, bem como apresentar materiais para feiras de ciências e similares, os quais podem ser confeccionados e apresentados pelos próprios alunos para o público em geral. As atividades de divulgação científica costumam motivar os alunos que passam a se interessar em como descobrir os segredos envolvidos nos números de magia, além de incentivar o trabalho coletivo e participativo.

Permutação de cartas e o Princípio Fundamental da Contagem



Neste número de magia três cartas, uma dama de copas e dois reis de espadas, são embaralhadas e o espectador deve adivinhar em qual posição a dama de copas foi parar após o embaralhamento.

O princípio multiplicativo da contagem diz que:

Se uma decisão puder ser tomada de n maneiras e, em seguida, outra decisão puder ser tomada independentemente de m maneiras, o número total de maneiras de tornarmos ambas as decisões é n × m.

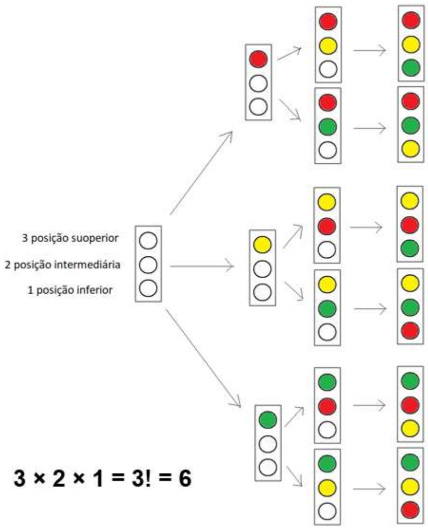
Deste modo, existem 3 x 2 x 1 = 6 embaralhamentos possíveis de três cartas, mas como duas delas são reis de espadas, há apenas 6 ÷ 2 = 3 configurações possíveis (ou a dama está na primeira posição, ou na posição central, ou na última posição).

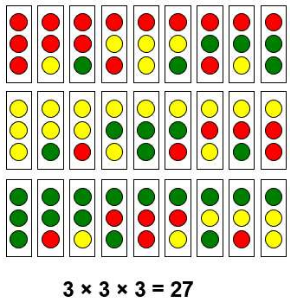
Mágicas com bolinhas coloridas

Quantos sinais de trânsito diferentes podemos construir com as cores verde, amarela e vermelha?

Sem repetição

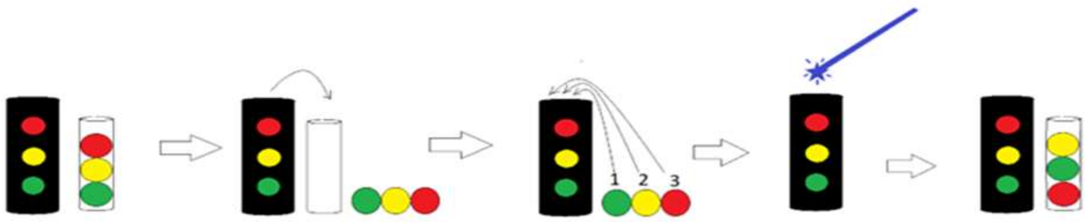
Com repetição





Primeira parte:

A primeira mágica com bolinhas começa com um tubo preto e um tubo transparente no qual estão empilhadas bolinhas de 3 cores, como se fosse um semáforo (uma bolinha verde na parte inferior, em cima dela uma bolinha amarela e, sobre esta última, uma bolinha verde). O mágico retira as bolinhas do tubo transparente, coloca o tubo preto sobre o tubo transparente vazio e, a seguir, coloca as bolinhas na ordem: verde, amarela e vermelha. Após fazer um passe de mágica o tubo preto é retirado e as bolinhas estão empilhadas em uma ordem diferente da que deveria estar. Elas aparecem na ordem: vermelha embaixo, verde no meio e amarela em cima.



Esta mágica permite apresentar o grupo de permutação de 3 elementos, *S(3)*, e introduzir as permutações como funções bijetoras de {1, 2, 3} em si mesmo. Permite também definir uma transposição como sendo a permutação em que dois elementos trocam entre si suas posições e os demais ficam fixos.

O conjunto das permutações de *n* elementos com a operação de composição é um grupo, chamado grupo simétrico *S(n)*. Este grupo, em geral, não é comutativo; ele possui *n!* elementos.

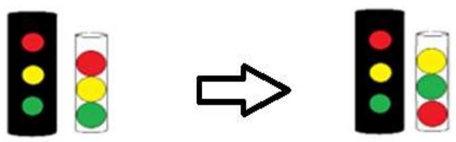
Uma maneira muito útil de estudar permutações é utilizar a notação de ciclos.

Um *r*-ciclo $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ é uma permutação *f* tal que $f(i_1) = i_2$, $f(i_2) = i_3$, … , $f(i_r) = i_1$ e os demais elementos ficam parados.

Um importante teorema sobre permutações é o seguinte:

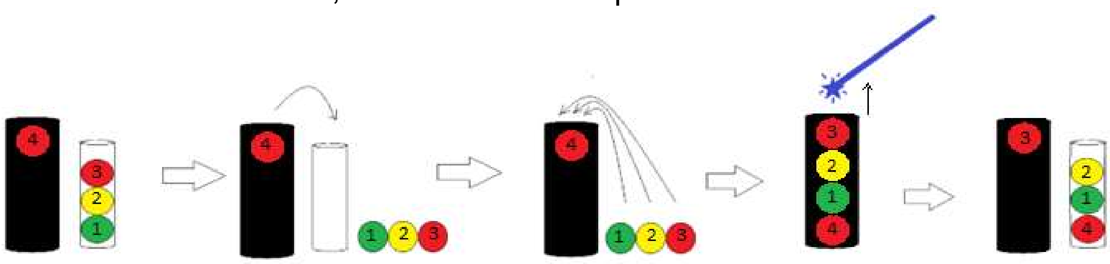
TEOREMA: Toda permutação é uma composição de ciclos disjuntos.

Na mágica das 3 bolinhas descritas acima, a surpresa é ver a permutação identidade ser transformada no 3-ciclo (1 3 2).



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Na verdade, ocorre a permutação de quatro bolinhas, uma verde, outra amarela e duas vermelhas, como mostra o esquema abaixo:



Somos levados, assim, ao estudo do grupo S(4). Ele possui 4! = 24 elementos, apresentados abaixo:

$$\begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\1243\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\1324\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\1342\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\1423\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\1432\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1234\\2134\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\2314\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\2341\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\2413\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\2431\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1234\\3124\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\3142\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\3214\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\3241\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\3421\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1234\\4123\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\4132\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\4213\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\4231\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\4312\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix}$$

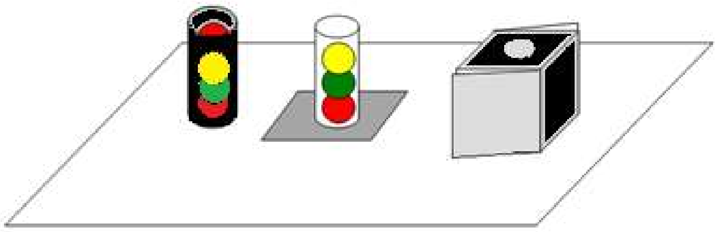
A mágica mostra que a identidade é transformada no 4 - ciclo (1 4 3 2), ou seja,

$$\begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1234\\4123\end{pmatrix}$$

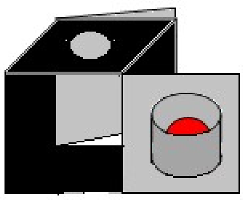
Como os elementos na quarta posição ficam escondidos do espectador, a ilusão é que as cores nas posições 1, 2 e 3 permutaram de maneira impossível, já que as bolas vermelhas são idênticas e podem ocupar uma o lugar da outra, sem que isso seja percebido.

Segunda parte:

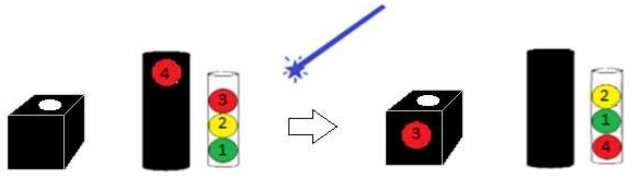
A mágica das bolinhas coloridas é agora refeita acrescentando-se uma caixa mágica na qual uma bolinha vermelha é introduzida e desaparece.



Na verdade, a caixinha tem um compartimento secreto na qual a bolinha vermelha fica escondida.



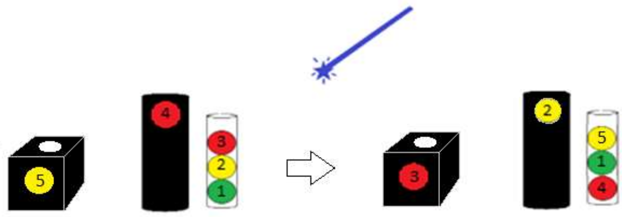
Nesse caso, ocorre uma nova permutação de 4 elementos.



$\begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1234\\4123\end{pmatrix}$

Terceira parte:

Nesse caso, são permutadas 5 bolinhas, 1 verde, 2 amarelas e 2 vermelhas. Na caixinha há espaço para 2 bolas e o mágico faz a troca da bolinha vermelha pela amarela.



$\begin{pmatrix}12345\\12345\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}12345\\41523\end{pmatrix}$

O jogo de virar copos e como provar que algo é impossível

Questões que envolvem paridade servem muito frequentemente para provar a impossibilidade de alguma tarefa. Para exemplificar esses fenômenos, vejamos 2 desafios:

DESAFIO 1: Virando simultaneamente dois dos copos abaixo, várias vezes, colocar todos os copos com a boca virada para cima.

Esse problema é solúvel, virando-se primeiramente o segundo e o quarto copos e, a seguir, o sétimo e o nono.

DESAFIO 2: Novamente, virando simultaneamente dois dos copos abaixo, várias vezes, colocar todos os copos com a boca virada para cima.

A tarefa é agora impossível. Para entender o motivo, associamos a cada copo com a boca virada para cima o número +1 e para cada copo com a boca virada para baixo o número -1.

Além disso, para cada distribuição de copos associamos o produto desses números. Por exemplo, na distribuição acima associamos o número (+1)(-1)(+1)(-1)(+1)(+1)(-1)(-1)(-1) = -1. Se todos os copos estivesse com a boca virada para cima, o número final associado a eles seria (+1)(+1)(+1)(+1)(+1)(+1)(+1)(+1)(+1) = +1. Quando viramos simultaneamente dois copos, os sinais + ou – associados a eles mudam, ambos. Logo o produto desses números com sinais permanece o mesmo pois

(-1).(+1) = -1, (+1).(-1) = -1, (-1).(-1) = +1, (+1).(+1) = +1

Logo, é impossível transformar uma distribuição de copos negativa em uma positiva, virando simultaneamente dois copos um número qualquer de vezes.

Jogo do 15 – impossibilidades via permutações

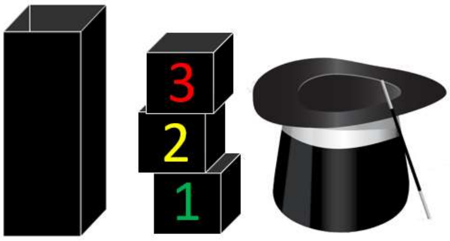
Indicamos a leitura do artigo

Puzzle-15: uma aplicação da teoria de grupos de Ticianne Proença Bueno Adorno e Ivonildes Ribeiro Martins Dias na Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 11, de outubro de 2016, pp. 42-60, disponível em https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1170/o/ticianne11.pdf

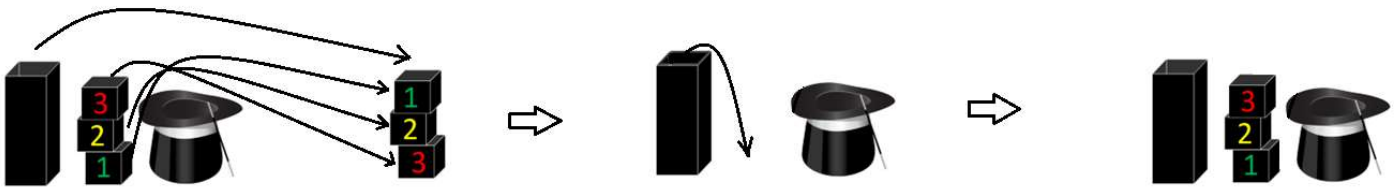
Nesse trabalho são exploradas as possibilidades de solução e de não solução do jogo do 15, baseado em paridade de permutações.

Permutações, cubos, teletransporte e desordenamentos

Nessa mágica, 3 cubos parecem voltar às suas posições inicial, embora sejam empilhados de modo diferente do original. Na verdade, o cubo verde é vazado e encobre um segundo cubo vermelho.



Observe que no início e no final da mágica o cubo do meio, com o número 2, ficou em sua posição original.



Existem, entretanto, permutações em que nenhum dos elementos fica em sua posição original. Elas são chamadas de permutações caóticas ou desordenamentos. É possível calcular o número de permutações caóticas usando o Princípio da Inclusão e Exclusão. A título de simplificação, isso será feito abaixo para o caso de permutações de 4 elementos, mas o caso geral segue a mesma linha de raciocínio. A notação n(A) será usada para denotar o número de elementos de um conjunto A.

Princípio de inclusão e exclusão:

$$n(A\cup B\cup C\cup D) = n(A)+n(B)+n(C)+n(D) - [n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(A\cap D)+n(B\cap C)+n(B\cap D)+n(C\cap D)] + [n(A\cap B\cap C)+n(A\cap B\cap D)+n(A\cap C\cap D)+n(B\cap C\cap D)] - n(A\cap B\cap C\cap D)$$

Consideramos, então, os conjuntos:

A = { permutações que deixam 1 em seu lugar }

B = { permutações que deixam 2 em seu lugar }

C = { permutações que deixam 3 em seu lugar }

D = { permutações que deixam 4 em seu lugar }

O número de desordenamento de 4 elementos, D(4), é

D(4) = 4! – n(AUBUCUD) =

4!–{n(A)+n(B)+n(C)+n(D)– [n(A∩B)+n(A∩C)+n(A∩D)+n(B∩C)+n(B∩D)+n(C∩D)]

+ [n(A∩B∩C)+n(A∩B∩D)+n(A∩C∩D)+n(B∩C∩D)] – n(A∩B∩C∩D) }

= 4! – n(AUBUCUD) = 4! – {6+6+6+6 – [2+2+2+2+2+2] + [1+1+1+1] – 1} = 9,

ou, também,

D(4) = 4! $\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 9$

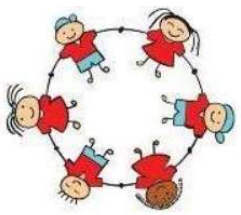
No caso geral de *n* elementos, o número de permutações caóticas é

D(*n*) = *n*! $\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$

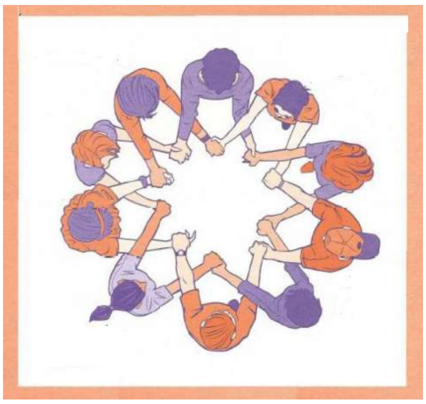
Para uma demonstração completa e rigorosa vide o livro *Análise Combinatória e Probabilidade* de Morgado, Pitombeira, Paulo Cezar Carvalho e Fernandes, SBM, 1991.

Cirandas, permutações circulares e enodamentos

As permutações circulares de *n* elementos, tais como as cirandas de crianças, são em número de *(n–1)!*, pois, podemos pensar que um elemento fica fixo e os demais permutam.



Uma atividade com ciranda que pode ser realizada em feiras de ciências e que traz um embrião da teoria matemática dos nós é ilustrada a seguir:



As pessoas seguram as mãos umas das outras, de maneira aleatória e, sem soltar as mãos, devem se desenlaçar. Podem acontecer 3 fenômenos diferentes:

a roda se tornar uma única roda maior com o formato circular, ou várias rodas menores separadas ou rodas menores enodadas.

Colares e permutações circulares

Para a confecção de colares ou pulseiras com miçangas coloridas, devemos dividir o número de permutações circulares por 2, devido às reflexões que tais objetos podem sofrer, sem que se transformem em algo diferente.

Fita de papel colorida: permutações, giros e reflexões

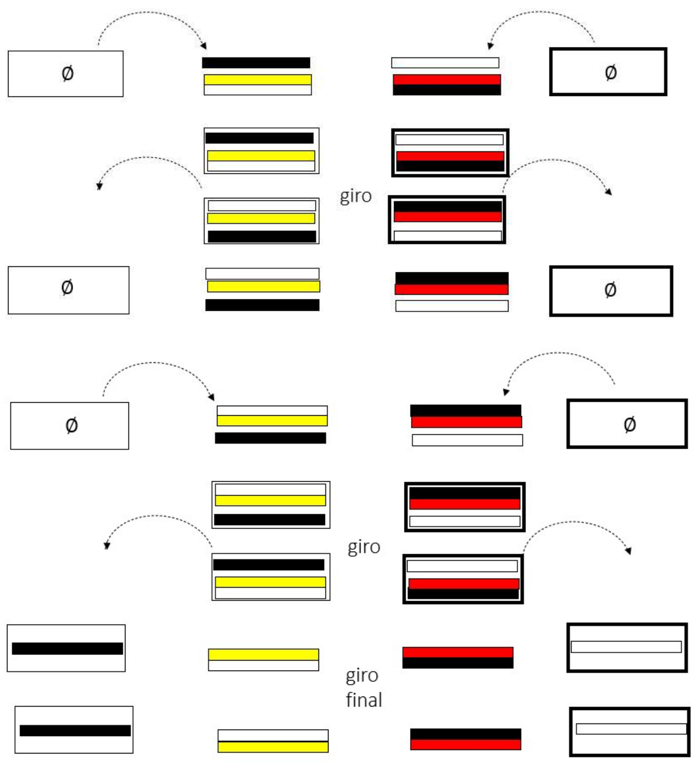
Indicamos a leitura do artigo Combinatória com cores, de Pedro Malagutti, RPM 75. Nesse artigo o manuseio de uma fita de papel com casas coloridas permite a aprendizagem de algumas técnicas de contagem próximas ao Princípio de Inclusão e Exclusão.

Permutação de coelhos

Nessa mágica, dois colhes aparentemente trocam de casas. O truque envolve 6 coelhos que são manipulados pelo mágico, como ilustrado abaixo.

Dois coelhos, um branco e outro preto, trocam de posição. O mágico diz que houve uma transposição, mas o espectador acredita que se trata apenas de movimentos de reflexão. No final do truque os coelhos aparecem nas cores amerelo e vermelho.

Visão do mágico



Referências:

Análise Combinatória e Probabilidade de Morgado, Pitombeira, Paulo Cezar Carvalho e Fernandes, SBM, 1991.

Combinatória com cores, Pedro Malagutti, RPM 75. Disponível em https://www.rpm.org.br/cdrpm/75/1.html.

Puzzle-15: uma aplicação da teoria de grupos Ticianne Proença Bueno Adorno e Ivonildes Ribeiro Martins Dias na Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 11, de outubro de 2016, pp. 42-60, disponível em https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1170/o/ticianne11.pdf

Mágicas, matemática e outros mistérios Malagutti e Sampaio, EDUFScar, 2011

Mágicas com papel, Geometria e outros mistérios, Malagutti e Sampaio, EDUFScar, 2015.