Problemas Olímpicos de Matemática em Sala de Aula

Prof. Luciano Monteiro de Castro
lucianogmcastro@gmail.com
@matematicamentexyz

Motivação

Você provavelmente já sabe que Olimpíadas de Matemática são uma oportunidade de revelar novos talentos, oferecendo desafios que expandem os limites de alunos com bom desempenho escolar. Mas o que diria para os alunos que têm mais dificuldade na matéria? “Problemas de Olimpíadas de Matemática não são pra você?”

Isso seria um grave erro. Problemas de Olimpíadas de Matemática proporcionam excelentes oportunidades de engajar alunos de quaisquer idades e qualquer nível de desenvolvimento. Eles nos ajudam a oferecer aos alunos a experiência de curiosidade e descoberta que impulsionou nossos grandes predecessores matemáticos.

Convido você a ler com atenção e refletir nas seguintes palavras do Professor Elon Lages Lima:

“É verdade que a Matemática é bela; que seu cultivo é uma das mais elevadas expressões da intelectualidade humana; que os problemas por ela propostos constituem desafios cuja solução fortalece a autoestima, sublima o espírito e recompensa nobremente o esforço.

Tudo isto é verdade, mas não é apenas por isso que a matemática é estudada na escola, em toda a parte. Não é apenas por isso que a Matemática é considerada cada dia mais imprescindível para a formação cultural e técnica do homem moderno.

A Matemática é indispensável por tudo isso e, mais especificamente, porque serve ao homem. Porque tem aplicações. Porque permite responder, de modo claro, preciso e indiscutível, perguntas que, sem o auxílio dela, continuariam sendo perguntas ou se transformariam em palpites, opiniões ou conjecturas.

As aplicações são a parte ancilar da Matemática. São a conexão entre a abstração e a realidade. Para um grande número de alunos, são o lado mais atraente das aulas, o despertador que os acorda, o estímulo que os incita a pensar.”

(18. O ensino médio da Matemática), Matemática e Ensino, p. 183-184)

Uma boa utilização de problemas de Olimpíadas em sala de aula ajuda fundamentalmente no primeiro parágrafo desse texto: fortalecer a autoestima, sublimar o espírito e recompensar nobremente o esforço. Para isso, é claro, é preciso que haja esforço. O aluno não pode ser um expectador passivo, precisa estar engajado ativamente no processo.

Por isso os desafios propostos devem estar ao seu alcance, porém devem exigir trabalho. E o estímulo para que haja esse trabalho deve vir da curiosidade: é importante que as perguntas sejam intrigantes, curiosas, para estimular o desejo de se encontrar uma solução.

E foi fundamentalmente com esta intenção pedagógica de instigar os alunos a pensar que surgiram as Olimpíadas de Matemática no Leste Europeu, mas precisamente na Hungria, no final do século 19. Muito podemos aprender dessa tradição de ensino de Matemática através de problemas, sendo a principal referência o livro "A arte de resolver problemas" (ou "How to Solve It") do professor húngaro George Pólya.

O livro é dirigido a professores, detalhando o método de engajar os alunos e servir como facilitador, dando dicas e direcionamentos para que eles cheguem por seu próprio esforço às soluções. No próprio livro, o autor descreve assim a importância do método:

"Ensinar a resolver problemas é educação da vontade. Ao resolver problemas que não sejam demasiado fáceis para ele, o estudante aprende a perseverar através de insucessos, a apreciar pequenos avanços, a esperar pela ideia essencial, e a concentrar-se com toda sua força quando essa ideia aparece. Se, na escola, o estudante não teve oportunidade de se familiarizar com as diversas emoções envolvidas na luta esforçada por uma solução, sua educação matemática falhou no seu ponto mais vital".

(G. Pólya – A arte de resolver problemas)

De fato, como lemos anteriormente nas palavras do Prof. Elon, a matemática é ensinada para que nossos alunos saibam aplicá-la diante de problemas concretos. Mesmo que a aplicação não pareça ser matemática a primeira vista, desenvolver essa atitude de esforço e dedicação concentrados na busca de uma solução trará benefícios em qualquer profissão e situação da vida.

Nós, professores de Matemática, somos naturalmente apaixonados pela matéria, e temos a responsabilidade de oferecer aos alunos oportunidades para enxergar essa beleza que nós vemos. Para isso devemos ir além dos automatismos e fórmulas prontas, que têm o seu lugar, mas importância limitada, jamais devendo ser o centro da nossa proposta de ensino.

Sobre isso, apresentamos mais uma citação do Prof. Pólya:

"Problemas rotineiros, até mesmo um bom número de problemas rotineiros, podem ser necessários no ensino de Matemática, mas fazer nada mais do que isso com os estudantes é imperdoável. Ensinar a execução rotineira de operações matemáticas e nada mais é bem abaixo do nível de um livro de receitas de cozinha, porque tais receitas ainda deixam alguma coisa para a imaginação e critério do cozinheiro, mas 'receitas matemáticas', não."

(G. Pólya – A arte de resolver problemas)

Então, o que você está esperando para começar a estimular mais seus alunos a pensarem em problemas interessantes, além do monótono e rotineiro?

Implementar novos hábitos e métodos em nossa prática pedagógica é sempre um desafio, com várias objeções naturais (a clássica “falta de tempo” nem precisa ser citada). Mas trataremos aqui de apenas duas, uma relacionada aos alunos e outra ao professor.

A primeira objeção é “meus alunos, especialmente os que têm mais dificuldade” não estão preparados para enfrentar este tipo de problemas. Mas isso nunca é verdade, porque toda a Matemática surgiu da necessidade de resolver algum problema, ainda que simples. Para cada aluno, não importa seu nível de desenvolvimento, há um problema adequado, no limite entre o que o desafia e o que ele é capaz de resolver. Cabe a nós assumir a responsabilidade de encontrar esses problemas e apresentá-los.

Aqui as Olimpíadas de Matemática são de ajuda inestimável. Há competições de todos os níveis, com grande quantidade de problemas interessantes. Para citar apenas algumas no âmbito nacional: Canguru de Matemática, OBMEP, Jacob Palis Jr., OBM, entre outras.

A segunda objeção, mais sutil, é o desconforto do professor diante de problemas que ele mesmo tem dificuldades para resolver. A boa notícia aqui é a de que isso acontece com todos nós, mesmo os mais experientes. É muito importante desenvolvermos humildade para aprender mais, estudando, conversando com colegas e também, é claro, com nossos próprios alunos.

Um professor que se interessa pelo aprendizado de seus alunos e quer sempre melhorar será mais útil do que um professor que “sabe tudo e nunca erra”. Devemos estar preparados para errar, não saber e admitir nossas limitações com humildade, sempre com o interesse maior à vista: ajudar nossos alunos a serem o melhor que eles podem ser.

Alguns Exemplos

(Canguru 2023 – Nível P)

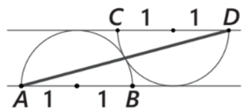
23. NUMA LAGOA, VIVEM 3 SAPOS. CADA NOITE, UM DOS SAPOS CANTA UMA CANÇÃO PARA OS OUTROS 2 SAPOS. DEPOIS DE 9 NOITES, UM DOS SAPOS HAVIA CANTADO 2 VEZES. OUTRO SAPO HAVIA ESCUTADO 5 CANÇÕES. QUANTAS CANÇÕES O TERCEIRO SAPO HAVIA ESCUTADO?

(A) 7 **(B)** 6 **(C)** 5 **(D)** 4 **(E)** 3

Solução: Como o segundo sapo escutou 5 canções, ele cantou nas demais noites, ou seja 9 – 5 = 4 vezes. Assim, o terceiro sapo cantou 9 – 2 – 4 = 3 vezes, portanto escutou 9 – 3 = 6 canções.

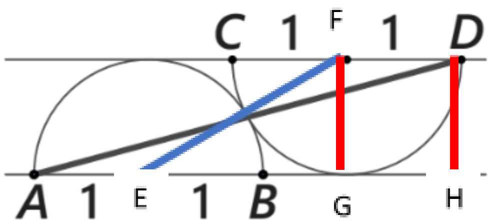
(Canguru 2023 – Nível J)

21. O diagrama mostra dois semicírculos tangentes de raio 1 e com diâmetros paralelos *AB* e *CD*. Qual é o quadrado da distância *AD*?



(A) 16 **(B)** $8+4\sqrt{3}$ **(C)** 12 **(D)** 9 **(E)** $5+2\sqrt{3}$

Solução:



Considere o triângulo retângulo EFG indicado na figura, sendo E e F os centro dos círculos e G o ponto de tangência do círculo de centro F com a reta AB. Como FG é igual ao raio, que vale 1, e FE = 2 (soma dos raios, pois os círculos são tangentes), pelo teorema de Pitágoras, temos $EG = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Agora, para calcular AD, traçamos a perpendicular DH a AB e aplicamos novamente o teorema de Pitágoras:

$AD^2 = 1^2 + (1 + \sqrt{3} + 1)^2 = 8 + 4\sqrt{3}$.

(OBMEP 2023 – Nível 2)

10. Se $ab = \frac{1}{2}$, $bc = \frac{1}{3}$ e $ac = \frac{1}{6}$, qual é o valor de

$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$?

(A) 10
(B) 12
(C) 14
(D) 16
(E) 20

Solução: Pelos dados fornecidos, $a^2b^2c^2 = \frac{1}{36}$

$$a^2b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow c^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{c^2} = 9 \;\; b^2c^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{a^2} = 4 \;\; a^2c^2 = \frac{1}{36} \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} = 1$$

Logo, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 9 + 4 + 1 = 14$

Outra solução: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2}$

Como $ab = \frac{1}{2}$, $bc = \frac{1}{3}$ e $ac = \frac{1}{6}$, a igualdade acima torna-se

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}{a^2b^2c^2} = \frac{\frac{14}{36}}{a^2b^2c^2}$$

Multiplicando membro a membro as igualdades $ab = \frac{1}{2}$, $bc = \frac{1}{3}$ e $ac = \frac{1}{6}$, chegamos a

$$a^2b^2c^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Logo, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{\frac{14}{36}}{a^2b^2c^2} = \frac{\frac{14}{36}}{\frac{1}{36}} = 14$

(Jacob Palis Jr. 2022 – Nível 3)

13 O polinômio $P(x)$ tem coeficientes inteiros e é tal que $P(0) = 1$ e $P(3) = 100$. Qual é o menor valor possível de $|P(10)|$?

Solução:
Para obter um polinômio que satisfaz $P(0) = 1$ e $P(3) = 100$, considere $Q(x) = P(x) - 33x - 1$, obtido subtraindo de P a equação da reta que passa por $(0, 1)$ e $(3, 100)$. Temos $Q(0) = Q(3) = 0$, de modo que $Q(x) = x(x - 3)R(x)$, ou seja,

$P(x) = x(x - 3)R(x) + 33x + 1$, em que $R(x)$ tem coeficientes inteiros. Nesse caso, $P(10) = 10 \cdot 7R(10) + 331 = 70(R(10) + 5) - 19$, cujo menor valor em valor absoluto é 19. Fazendo $R(x) =- 5$, obtemos um polinômio $P(x) =- 5x(x - 3) + 33x + 1$ válido.