Progressões

Ledo Vaccaro Machado

Suponhamos que se deseja saber qual é o custo de manutenção das estações do metrô. A ordem das estações não tem importância. O que interessa é quais são as estações e qual é o custo de cada uma delas. Entretanto, para o usuário do metrô, o passageiro, não interessa apenas quais as estações que existem, mas qual a ordem dessas estações para que ele possa se preparar para saltar quando a sua estação de destino estiver se aproximando. Estamos diante de duas entidades: o conjunto das estações do metrô, em que a ordem das estações não tem relevância, e a sucessão das estações, em que a ordem tem importância.

$\{a, e, i, o, u\} = \{o, i, a, u, e\}$

$(a, e, i, o, u) \neq (o, i, a, u, e)$

Para indicarmos a posição de um termo em uma sucessão, utilizamos variáveis com índice, variáveis indexadas. O índice é o "endereço" da variável na sequência (sucessão).

$(a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n , \ldots)$

Uma sequência pode ser finita (como a sequência das estações do metrô, a sequência dos números das casas de uma rua) ou infinita (a sequência dos números naturais, a sequência dos números primos).

Os termos de uma sequência podem surgir aleatoriamente. Imaginemos que estamos lançando um dado de seis faces e registrando, através de uma sequência, o número obtido em cada lançamento. Os resultados poderiam ser:

(4, 6, 3, 3, 2 ,4, 1, 5, 2, ...)

Não é possível dizer qual será o próximo número. Entretanto, muitas sequências possuem uma lei de formação. Por exemplo, na sequência de Fibonacci, os dois primeiros termos são iguais a 1 e seus termos, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois anteriores:

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)

$2 = 1 + 1$

$3 = 2 + 1$

$5 = 2 + 3$

$8 = 3 + 5$

$13 = 5 + 8$

. . .

Poderíamos apresentar a sequência de Fibonacci lançando mão das aviáveis indexadas:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ , n \geq 3 \end{cases}$$

Algumas leis de formação de sequências podem gerar sequências que entram em repetição. Observe o problema a seguir:

Determine o centésimo termo da sequência dada por

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + (-1)^n \cdot a_{n-2} \ , n \geq 3 \end{cases}$$

Resolução:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$a_3 = a_2 + (-1)^3 \cdot a_1 = 1 + (-1) \cdot 1 = 1 - 1 = 0$

$a_4 = a_3 + (-1)^4 \cdot a_2 = 0 + 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1$

$a_5 = a_4 + (-1)^5 \cdot a_3 = 1 + (-1) \cdot 0 = 1 - 0 = 1$

...

(1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, ...)

A cada três termos, obtemos zero. Assim, $a_{99} = 0$, e $a_{100} = 0$.

Uma clássica sequência que se repete é a que surge no problema:

Sendo i a unidade imaginária, qual o centésimo termo da sequência dada por i^n, $n \geq 1$?

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$

$i^4 = i^3 \times i = -i \times i = -i^2 = -(-1) = 1$

$i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = -i^2 = i$

$i^6 = i^5 \times i = i \times i = i^2 = -1$

. . .

$(i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, \ldots)$

A sequência se repete de quatro em quatro termos, e $a_{100} = 1$.

Duas sequências particularmente importante são a Progressão Aritmética, P.A., caracterizada por uma sucessão de adições, e a Progressão Geométrica, P.G., caracterizada por uma sucessão de multiplicações.

Progressão Aritmética — é uma sucessão numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior acrescido de uma constante. Essa constante é a razão da P.A.

Sendo r a razão da P.A., temos:

fórmula de recorrência da P.A.

$a_n = a_{n-1} + r$, $n \geq 2$

fórmula do termo geral

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

Note que a fórmula de recorrência nos permite construir a sucessão termo a termo, e a formula do termo geral nos permite obter um termo qualquer conhecendo sua posição na sequência.

Na P.A., ainda temos a fórmula da soma dos n primeiros termos:

$S_n = (a_1 + a_n)n/2$

Progressão Geométrica — é uma sucessão numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante. Essa constante é a razão da P.G.

Sendo q a razão da P.G., temos:

fórmula de recorrência da P.G.

$a_n = a_{n-1} \cdot q$, $n \geq 2$

fórmula do termo geral

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Na P.G., ainda temos:

fórmula da soma dos n primeiros termos

$S_n = (a_n q - a_1)/(q - 1)$ ou $S_n = a_1(q^n - 1)/(q - 1)$

limite da soma dos termos de uma P.G. infinita com $-1 \leq q \leq 1$

$S = a_1/(1 - q)$

Problema

Suponhamos que exista um jogo no qual o jogador aposta qualquer quantia em um número de 1 a 25, e um desses números é sorteado. Se o número sorteado for o escolhido, o jogador ganha 18 vezes o valor apostado. Alguém resolve fazer a seguinte sequência de aposta:

1 real no primeiro dia; 2 reais no segundo dia; 3 reais no terceiro dia, e assim sucessivamente, sempre aumentando 1 real por dia até ganhar. Durante quantos dias essa pessoa vai ganhar mais do que o total apostado?

Solução:

Valor apostado a cada dia (dia n) $\rightarrow$ n

Total apostado até o dia n $\rightarrow 1 + 2 + 3 + \ldots + n = (1 + n)n/2$

Valor ganho se for sorteado o número escolhido no dia n $\rightarrow$ 18n

Diferença entre o valor ganho e o total apostado $\rightarrow 18n - (1 + n)n/2 = (36n - n - n^2)/2 =$

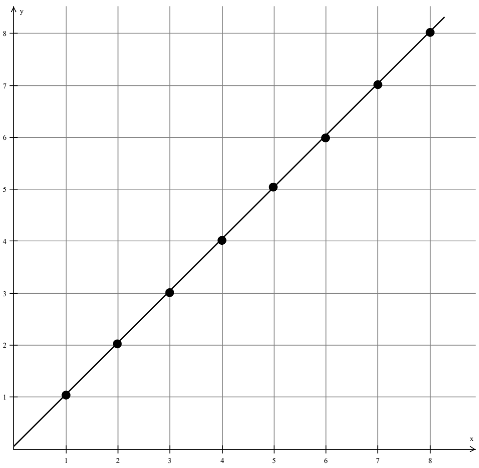
$= (35n - n^2)/2$

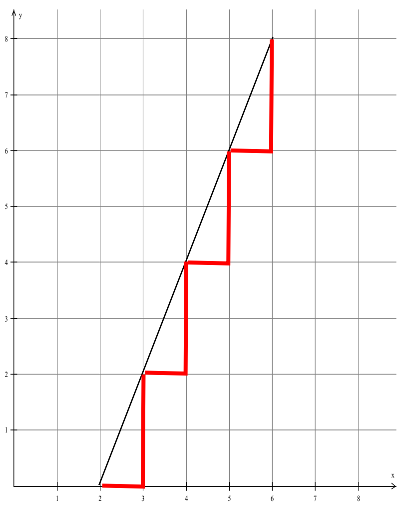
Até que dia o apostador terá lucro $\rightarrow (35n - n^2)/2 > 0 \Rightarrow 35n - n^2 > 0 \Rightarrow n(35 - n) > 0 \Rightarrow n < 35$

Toda P.A. é uma discretização de uma função afim (acréscimos iguais a x correspondem a acréscimos iguais a y). Aumentando uma unidade no n, a_n aumentará r unidades (isso vem da própria definição de P.A.).

No nosso problema:

n	a_n
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8





Toda função afim cujo domínio é o conjunto dos naturais gera uma P.A.

$f(n) = an + b,\ \ n \in \{1, 2, 3, 4, ...\}$

$f(n + 1) = a(n + 1) + b = an + a + b = (an + b) + a = f(n) + a$

Vamos considerar o total apostado até o dia n (soma dos n primeiros termos da P.A.):

$S_n = (1 + n)n/2 = n/2 + n^2/2$

Isso é uma P.A. de segunda ordem (a diferença entre termos consecutivos forma uma P.A.)

$S_n \rightarrow$ 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, ...

$S_{n+1} - S_n \rightarrow$ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...

$S_{n+1} - S_n = (1 + (n + 1))(n + 1)/2 - (1 + n)n/2 = (n + (1 + 1))(n + 1)/2 - (1 + n)n/2 =$

$= n(n + 1)/2 + 2(n + 1)/2 - (1 + n)n/2 = n + 1$

Toda função quadrática cujo domínio é o conjunto dos naturais gera uma P.A. de segunda ordem.

$f(n) = an^2 + bn + c,\ n \in \{1, 2, 3, 4, ...\}$

$f(n + 1) - f(n) =$

$= a(n+1)^2 + b(n + 1) + c - (an^2 + bn + c) = a(n^2 + 2n + 1) + b(n + 1) + c - (an^2 + bn + c) =$

$= an^2 + 2an + a + bn + b + c - an^2 - bn - c = 2an + a + b$ (expressão do 1ª grau, P.A.)

Vamos considerar a diferença entre o valor ganho e o total apostado, considerando que o jogador ganhou no dia n:

$18n - (1 + n)n/2 = (36n - n - n^2)/2 = (35n - n^2)/2 = (35 - n)n/2$

Essa diferença será positiva para todo n menor do que 35 (n só assume valores maiores ou iguais a 1). Portanto, o jogador terá lucro até o 34º dia, no 35º dia ele zera o total apostado com o que ganhou e, a partir do 36º dia, ele passa a ter prejuízo.

Qual é a probabilidade de ele ter lucro com esse esquema de aposta? É a probabilidade de ele ganhar até o 34º dia, ou seja, ganhar no primeiro dia ou ganhar no segundo ou não ganhar no terceiro ou ... ou ganhar no 33º dia ou ganhar no 34º dia.

$(1/25)$ +

$+ (24/25)\cdot(1/25) +$

$+ (24/25)\cdot(24/25)\cdot(1/25) +$

$+ (24/25)\cdot(24/25)\cdot(24/25)\cdot(1/25) +$

. . .

$+ (24/25)^{33}\cdot(1/25) =$

$= (1/25) + (24/25)\cdot(1/25) + (24/25)^2\cdot(1/25) + \ldots + (24/25)^{33}\cdot(1/25)$

Que é a soma dos termos de uma P.G. com 34 termos, primeiro termo 1/25 e razão 24/25

$(1/25)[(24/25)^{34} - 1]/[(24/25) - 1] \approx 0{,}7504$

E se jogássemos segundo uma P.G.?

1 real no primeiro dia; 2 reais no segundo dia; 4 reais no terceiro dia, e assim sucessivamente, sempre a cada dia até ganhar. Durante quantos dias essa pessoa vai ganhar mais do que o total apostado?

Valor apostado a cada dia (dia n) $\rightarrow 2^{n-1}$

Total apostado até o dia n $\rightarrow 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = [1\cdot(2^n - 1)]/(2 - 1) = 2^n - 1$

Valor ganho se for sorteado o número escolhido no dia n $\rightarrow 18\cdot2^{n-1}$

Diferença entre o valor ganho e o total apostado $\rightarrow 18\cdot2^{n-1} - (2^n - 1) = 9\cdot2^n - 2^n + 1 = 8\cdot2^n + 1$

Até que dia o apostador terá lucro $\rightarrow 8\cdot2^n + 1 > 0$ (o que é verdadeiro para todo valor de n).

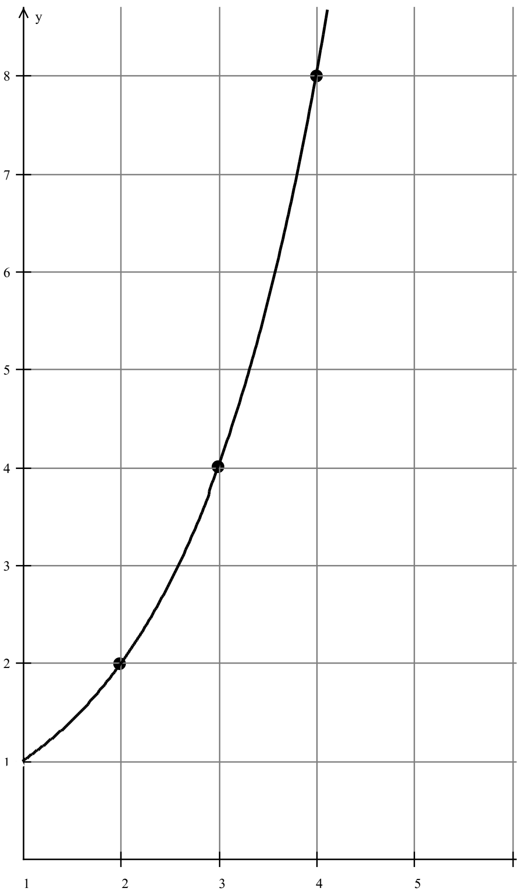
O problema de jogar em P.G. são os valores que as apostas assumem.

Toda P.G. é uma discretização de uma função exponencial (quando o x cresce em P.A, — acréscimos iguais a x — o y cresce em P.G.). Aumentando n de uma em uma unidade, a_n aumentará em P.G.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_{n+1} = a_1 \cdot q^{(n+1)-1} = a_1 \cdot q^{(n-1)+1} = a_1 \cdot q^{(n-1)} \cdot q^1 = [a_1 \cdot q^{(n-1)}] \cdot q^1 = a_n \cdot q$

No nosso problema:

n	$a_n = 2^{n-1}$
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32
7	64
8	128



Dízimas

0,555...

Uma regra para obter a geratriz de uma dízima periódica simples:

Coloca-se no numerador um período e no denominador tantos noves quantos forem os algarismos do período.

0,555... = 5/9

Por que essa regra funciona? Limite da soma dos termos de uma P.G.

0,5 + 0,05 + 0,005 + ... = 0,5/(1 – 0,1) = 0,5/0,9 = 5/9

1,454545... = 1 + 45/99 = 1 + 5/11 = 11/11 + 5/11 = 16/11

1 + 0,45 + 0,0045 + 0,000045 + ... = 1 + 0,45/(1 – 0,01) = 1 + 0,45/0,99 = 1 + 45/99 = 16/11

0,2555...

Uma regra para obter a geratriz de uma dízima periódica composta:

Coloca-se no numerador um antiperíodo seguido de um período, subtraído de um antiperíodo. E no denominador tantos noves quantos forem os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos forem os algarismos do antiperíodo.

0,2555... = (25 – 2)/90 = 23/90

Por que essa regra funciona? Novamente, o limite da soma dos termos de uma P.G.

0,2555... = 0,2 + 0,05 + 0,005 + 0,0005 + ... = 0,2 + 0,05/(1 – 0,1) = 0,2 + 0,05/0,9 = 0,2 + 5/90 =
= (0,2·90 + 5)/90 = (2·9 + 5)/90 = (2·(10 – 1) + 5)/90 = (20 – 2 + 5)/90 = (25 – 2)/90 = 23/90

1,245323232... = 1 + (24532 – 245)/99000 = 1 + 24287/99000 = 123287/99000

1 + 0,245 + 0,00032 + 0,0000032 + 0,000000032 + ... = 1 + 0,245 + 0,00032/(1 – 0,01)
= 1 + 0,245 + 0,00032/0,99 = 1 + 0,245 + 32/99000 = 1 + (0,245·99000 + 32)/99000

$= 1 + (245 \cdot 99 + 32)/99000 = 1 + (245 \cdot (100 - 1) + 32)/99000 = 1 + (24500 - 245 + 32)/99000 =$
$= 1 + (24532 - 245)/99000 = 1 + 24287/99000 = 123287/99000$