Prof. Daniel Cordeiro – Papmem - Julho de 2023- Aula

Números irracionais envolvendo logaritmos e funções trigonométricas

1. Introdução

Na aula de janeiro de 2023, visando compreender melhor os números reais e enriquecer os exemplos de números irracionais, em geral, pouco diversificados em livros e na internet, exibimos uma maneira de reconhecer um número irracional usando representação decimal. Naquela aula, também vimos vários exemplos de números irracionais como esses abaixo

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt{2}+3}+17} \qquad \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5}}}}}$$

Figura 1: Exemplos de número irracionais, usando-se radicais.

Esses exemplos, que não levavam em conta a representação decimal, foram gerados usando-se radicais. Nessa aula, vamos aprender a dar mais exemplos de números irracionais, dessa vez, usando logaritmos e funções trigonométricas. Com isso, pretendemos enriquecer e diversificar ainda mais os exemplos de números irracionais.

2. Recordando um pouco sobre números racionais e irracionais

Visando trabalhar e reconhecer números irracionais, recordemos que tipo de número – racional ou irracional – obtemos operando-se com os números reais.

Veja o resumo:

$$R, r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{r} \in \mathbb{Q}, r \neq 0 \\ r \cdot R \in \mathbb{Q} \\ r + R \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

O conjunto dos números racionais é um corpo

Figura 2: Operações com números racionais.

Na figura acima, tem-se:

- O inverso de um número racional não nulo é um número racional;
- O produto de dois números racionais é um número racional;
- A soma de dois números racionais é um número racional.

Também precisaremos recordar o que ocorre ao operarmos números racionais e irracionais:

$$\left.\begin{matrix} r \in \mathbb{Q} \\ I \notin \mathbb{Q} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} r + I \notin \mathbb{Q}; \\ r \cdot I \notin \mathbb{Q}, r \neq 0; \\ \frac{1}{I} \notin \mathbb{Q}; \\ \sqrt[n]{I} \notin \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, I > 0. \end{cases}$$

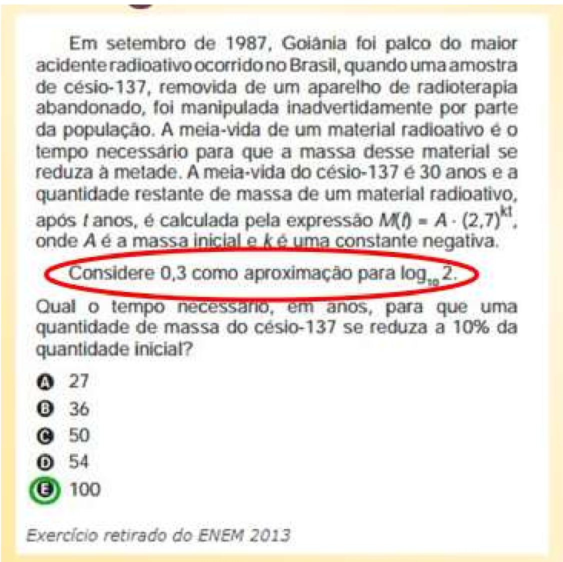
Figura 3: Operação com números racionais e irracionais.

Na figura acima tem-se:

- A soma de um número racional com um número irracional é um número irracional;
- O produto de um número racional não nulo com um número irracional é um número irracional;
- O inverso de um número irracional é um número irracional
- A raiz n-ésima de um número irracional positivo é um número irracional.

3. Como encontrar números irracionais utilizando logaritmos

Os logaritmos fazem parte dos assuntos estudados no Ensino Médio e aparecem amiúde em provas e testes, como parte principal ou não, como nessa questão do Enem de 2013:


Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2{,}7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

A 27
B 36
C 50
D 54
E 100

Exercício retirado do ENEM 2013

Figura 4: Questão do Enem onde aparece logaritmo.

Seria legítimo alguém perguntar que tipo de número é $\mathbf{\log_{10} 2}$, o logaritmo decimal de dois, que aparece na questão e cuja única informação conhecida é que ele vale aproximadamente 0,3.

Bem, esse número é um número racional ou irracional? Ao calcular esse número em uma calculadora com precisão, encontramos

$$\mathbf{\log_{10} 2 = 0,30102999566398119521373894724493026768189881462108}$$
$$\mathbf{54131042746112710818927442 5} \ldots$$

Analisando a representação decimal desse número, até onde conseguimos ver, ela não apresenta período, mas isso não garante a irracionalidade do número. Adiantamos que esse é um exemplo de número irracional que estamos procurando: dado por um logaritmo, e leitoras e leitores vão aprender nessa seção como provar esse tipo de irracionalidade.

Antes de aprendermos a exibir exemplos de números irracionais usando logaritmos, recordemos a definição do logaritmo de um número.

A definição do logaritmo de um número

Definição: Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$.

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Figura 5: Definição do logaritmo.

Com a definição acima, basta seguir o roteiro de demonstração que usaremos nesse nosso primeiro exemplo para demonstrar a irracionalidade de alguns números. A demonstração é indireta e feita pelo método de demonstração por absurdo.

EXEMPLO 1

$$\log_3 5 \notin \mathbb{Q}$$

Suponha, por contradição, que $\log_3 5 \in \mathbb{Q}$. Assim, como $\log_3 5 > 0$, podemos escrever

$$\log_3 5 = \frac{m}{n};\ m, n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 3^{\frac{m}{n}} = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{3^m} = \boxed{5^n}$$

Termina em 3,9,7,1

Termina em 5

ABSURDO!!!

Logo, $\log_3 5 \notin \mathbb{Q}$.

15 PAPMEM – Julho 2023- Prof. Daniel Cordeiro

Figura 6: Exemplo 1.

O absurdo na demonstração acima, também poderia ser obtido utilizando-se os seguintes resultados, comumente conhecidos

Teorema 1: Se $p \in \mathbb{N}$ é um número primo, $a, b \in \mathbb{Z}$ e $p \mid a \cdot b$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Corolário 1: p primo, $a \in \mathbb{Z}$ e $p \mid a^n \Rightarrow p \mid a$

De fato, observemos como também poderíamos concluir a demonstração anterior:

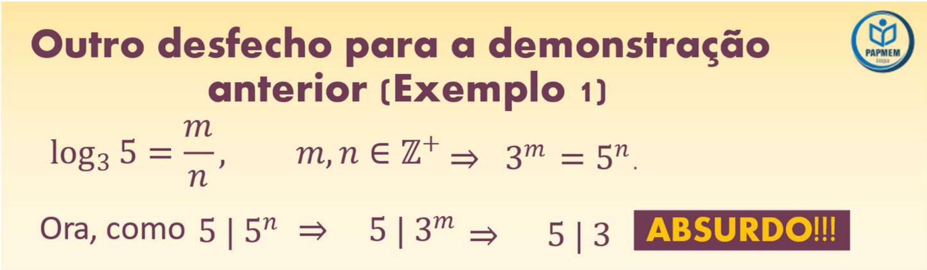


Figura 7: Outro desfecho para a demonstração do Exemplo 1, usando o corolário.

Vejamos o segundo exemplo de número irracional:

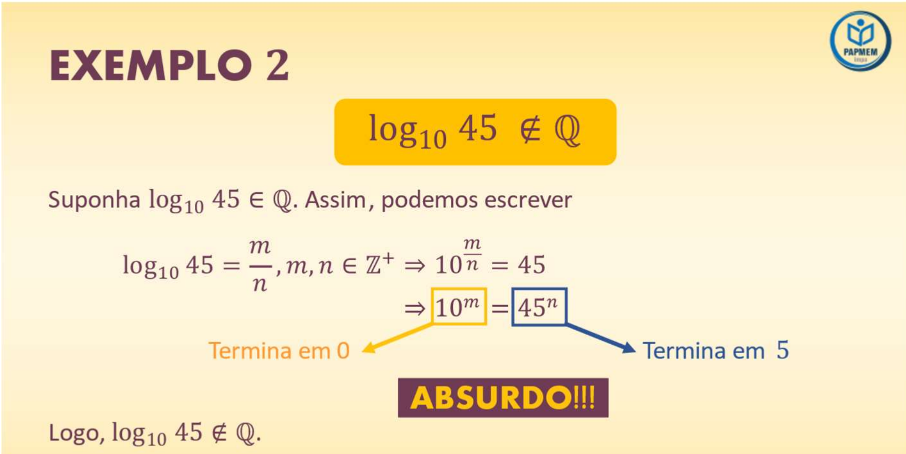


Figura 8: Segundo exemplo de número irracional usando-se logaritmo.

O exemplo anterior também poderia ter o seguinte desfecho:

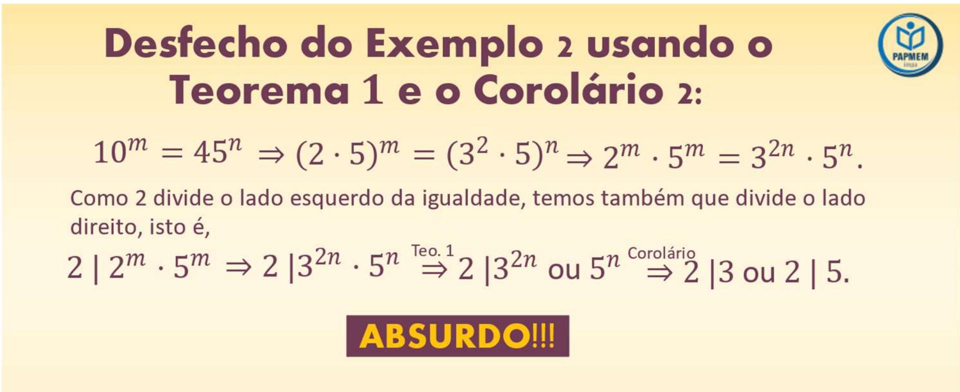


Figura 9: Outro desfecho para a demonstração do Exemplo 2, usando o corolário

Pode-se usar algumas das propriedades dos logaritmos para também dar exemplos de outros números irracionais, sabendo-se da irracionalidade de um número dado por logaritmo. Provamos no Exemplo 1 a irracionalidade do número $\log_3 5 \notin \mathbb{Q}$. Usando-se esse número, veja a seguir como usar algumas propriedades do logaritmo para dar outros exemplos de números irracionais envolvendo também logaritmos.

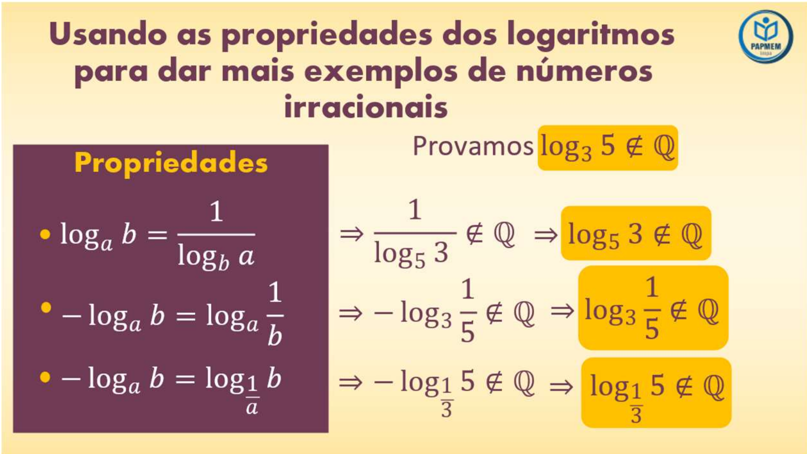


Figura 10: Exemplos de números irracionais envolvendo logaritmos, se se conhece a irracionalidade de um deles. Os valores de a e b devem ser tais que as expressões façam sentido.

Concluímos essa seção, solicitando aos leitores que demonstrem, como exercício, a irracionalidade de $\log_{10} 2$.

Ressaltamos a facilidade de dar exemplos utilizando-se logaritmos, basta soltar um pouco a criatividade, como fizemos nesse último exemplo:

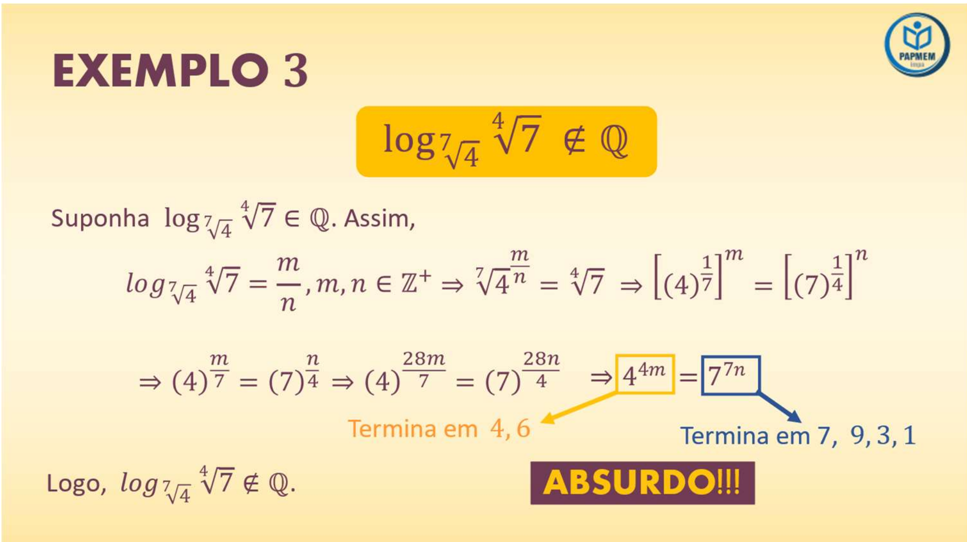


Figura 11: Exemplo não comum de número irracional com logaritmo em sua expressão.

4. Como usar equações polinomiais para encontrar números irracionais

Na Figura 1: Exemplos de número irracionais, usando-se radicais.” vê-se que os exemplos apresentados são raízes de algumas equações algébricas:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é raiz da equação polinomial: $x^2 - x - 1 = 0$

Figura 12: Número irracional dado por radicais (visto na aula de janeiro).

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5}}}}} \notin \mathbb{Q}$$

é raiz da equação polinomial ...

Figura 13: Número irracional dado por radicais (visto na aula de janeiro).

$$\Rightarrow\ x^{32} - 16x^{30} + 104x^{28} - 336x^{26} + 464x^{24} + 256x^{22} - 1712x^{20} + 1632x^{18} + 1088x^{16} - 2816x^{14} + 768x^{12} + 1536x^{10} - 960x^8 - 256x^6 + 256x^4 - 5 = 0$$

Figura 14: Equação da qual o número anterior é raiz.

Sem dúvida, essa última equação foi encontrada após muito esforço, envolvendo produtos notáveis calculados consecutivamente!

Seguindo o que apresentamos acima surgem, portanto, as perguntas

- Números irracionais têm ligação com equações polinomiais?
- O que na verdade está por trás disso?
- É possível usar equações polinomiais para provar irracionalidade de números?

Na verdade, vamos usar equações polinomiais para dar exemplos de números irracionais envolvendo funções trigonométricas. Antes, contudo, vejamos a seguinte definição:

Equação Polinomial com coeficientes inteiros

Uma **equação polinomial de grau n** com coeficientes inteiros é uma equação do tipo

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

$a_i \in \mathbb{Z},\ \ a_n \neq 0.$

Figura 15: Definição importante.

Para o que vamos trabalhar a seguir, precisaremos do seguinte teorema, muito útil para nossos propósitos

TEOREMA 2 (CASO GERAL):

Se $\frac{m}{d} \in \mathbb{Q}$, $mdc(m,d) = 1$, é uma raiz da equação polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

$a_i \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0$, então

$$m \mid a_0 \qquad \text{e} \qquad d \mid a_n.$$

Figura 16: Caso geral do Teorema 2.

A seguir, apresentaremos a demonstração desse teorema. Para facilitar o entendimento, demonstraremos esse teorema no caso $n = 3$, o caso geral segue, exatamente, os mesmos passos, e fica a cargos das leitoras e dos leitores.

Demonstraremos o teorema acima na seguinte formulação:

TEOREMA 2 (CASO $n = 3$)

Teorema 2

Se $\frac{m}{d} \in \mathbb{Q}$, $mdc(m, d) = 1$ é uma raiz da equação polinomial

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

$a_i \in \mathbb{Z}, a_3 \neq 0$, então

$$m \mid a_0 \qquad \text{e} \qquad d \mid a_3.$$

Figura 17: Teorema 2 no caso em que n=3.

Demonstração: 1º Parte: $m|a_0$

$$x = \frac{m}{d} \;\Rightarrow\; a_3\left(\frac{m}{d}\right)^3 + a_2\left(\frac{m}{d}\right)^2 + a_1\left(\frac{m}{d}\right) + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow\; a_3 \cdot \frac{m^3}{d^3} + a_2 \cdot \frac{m^2}{d^2} + a_1 \cdot \frac{m}{d} + a_0 = 0 \quad (\times\, d^3)$$

$$\Rightarrow\; a_3m^3 + a_2 \cdot m^2d + a_1md^2 + a_0d^3 = 0$$

$$\Rightarrow\; a_0d^3 = -m(a_3m^2 + a_2md + a_1d^2)$$

Demonstração: 1º Parte: $m|a_0$

- Se $m = \pm 1$, ok!
- Se $m \neq \pm 1$, usamos o

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Todo número inteiro positivo maior do que um pode ser representado de forma única como produto de números primos.

Demonstração: 1º Parte: $m|a_0$

Lembre-se: $mdc(m,d) = 1$

$$a_0 d^3 = -m(a_3 m^2 + a_2 md + a_1 d^2)$$

- Suponha $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, com p_i primos e $\alpha_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i \geq 1$

$$\Rightarrow p_i|a_0 d^3 \Rightarrow \; p_i|a_0 \;\text{ ou }\; p_i|d^3 \Rightarrow \; p_i|a_0 \text{ ou } \cancel{p_i|d}$$

$$\Rightarrow p_i^{\alpha_i} \text{ aparece na decomposição de } a_0$$

$$\Rightarrow a_0 = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.r = mr, r \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m|a_0$$

Demonstração: 2º Parte: $d|a_3$

$$a_3 m^3 + a_2 m^2 d + a_1 m d^2 + a_0 d^3 = 0$$

$$\Rightarrow a_3 m^3 = -d(a_2 m^2 + a_1 md + a_0 d^2)$$

Procede-se do mesmo jeito:

$$\Rightarrow d|a_3$$

Vejamos uma aplicação desse teorema que nos será muito útil, sobre uma pergunta bastante pertinente para nossos propósitos:

Seja a equação polinomial:

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

É possível verificar se as (eventuais) **raízes reais** dessa equação são irracionais ou não, sem resolvê-la?!

Basta aplicar o Teorema:

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

Suponha $x \in \mathbb{R}$ uma raiz da equação.

Se $x = \frac{m}{d} \in \mathbb{Q}$, pelo Teorema 2, tem-se

$$m \mid -1 \Rightarrow m \in \{\pm 1\}$$

e

$$d \mid 8 \Rightarrow d \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}.$$

Logo,

$$x = \frac{m}{d} \in \left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}\right\}.$$

Figura 18: Aplicação do Teorema 2.

Depois de descobrir as candidatas a raízes racionais da equação, a maneira mais imediata é testar se são ou não raízes:

Testando os valores encontrados

x	$8x^3 - 6x - 1 = 0$	Raiz?
1	$8(1)^3 - 6(1) - 1 = 8 - 6 - 1 = 1$	NÃO
-1	$8(-1)^3 - 6(-1) - 1 = -8 + 6 - 1 = -3$	NÃO
$1/2$	$8(1/2)^3 - 6(1/2) - 1 = 8 \cdot 1/8 - 6/2 - 1 = 1 - 3 - 1 = -3$	NÃO
$-1/2$	$8(-1/2)^3 - 6(-1/2) - 1 = 8 \cdot (-1/8) + 6/2 - 1 = -1 + 3 - 1 = -1 + 3 - 1 = 1$	NÃO
$1/4$	$8(1/4)^3 - 6(1/4) - 1 = 8 \cdot (1/64) - 6/4 - 1 = 1/8 - 6/4 - 1 = -19/8$	NÃO
$-1/4$	$8(-1/4)^3 - 6(-1/4) - 1 = 8 \cdot (-1/64) + 6/4 - 1 = 8 \cdot (-1/64) + 6/4 - 1 = 3/8$	NÃO
$1/8$	$8(1/8)^3 - 6(1/8) - 1 = 8/8^3 - 6/8 - 1 = 1/64 - 6/8 - 1 = -111/64$	NÃO
$-1/8$	$8(-1/8)^3 - 6(-1/8) - 1 = -8/8^3 + 6/8 - 1 = -1/64 + 6/8 - 1 = -17/64$	NÃO

Figura 19:Método para testar se um número é raiz de uma equação. Pode haver maneiras mais simples, como mostraremos mais adiante.

Como nenhum dos valores testados é raiz da equação, chega-se à seguinte conclusão:

Toda raiz real de $8x^3 - 6x - 1 = 0$ é irracional

Para comprovar ainda mais a versatilidade do Teorema 2 vamos demonstrar a seguinte irracionalidade:

$$\sqrt[2023]{2023} \notin \mathbb{Q}$$

Figura 20: Exemplo de número irracional cuja demonstração vai decorrer do Teorema 2.

Para isso, segue-se os mesmos passos do exemplo anterior e se chega que as *eventuais* raízes racionais de equação polinomial que são, na verdade, divisores de 2023. Veja:

$x = \sqrt[2023]{2023} \Rightarrow x^{2023} - 2023 = 0$

À procura das raízes racionais:

Se $x = \frac{m}{d} \in \mathbb{Q} \Rightarrow d|1$ e $m|2023$

$2023 = 7 \cdot 17 \cdot 17$

Divisores de 2023: $\pm 1, \pm 7, \pm 17, \pm 119, \pm 289, \pm 2023$

Não vai ser preciso substituir cada um desses valores na equação para verificar se é ou não raiz. Basta ver que:

- Nenhum valor negativo pode ser raiz, pois potências negativas ímpares de valores negativos são negativas, e não satisfariam a equação $x^{2023} - 2023 = 0$.
- Já os valores positivos, vê-se que 1 não seria raiz. Já para 7, note que

$$7^2 = 49, \quad 7^3 = 343, \quad 7^4 = 2401 > 2023$$

Daí, vê-se logo o quanto 7^{2023} é bem maior do que 2023. O mesmo ocorre com as potências 2023 dos outros valores positivos maiores do que 7.

Conclusão:

$$x \notin \{\pm 1, \pm 7, \pm 17, \pm 119, \pm 289, \pm 2023\}$$

Assim,

$x = \sqrt[2023]{2023}$ é um número irracional!

5. Números irracionais envolvendo funções trigonométricas

Chegamos no momento de fazer a pergunta de como usar equações polinomiais para encontrar números irracionais envolvendo funções trigonométricas.

A resposta é usar o teorema que já vimos:

Se a equação polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

$a_i \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0$, possuir uma raiz racional,

$$x = \frac{m}{d}, m, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0, mdc(m, d) = 1,$$

então $d | a_n$ e $m | a_0$

Figura 21: Teorema 2

e encontrar equações polinomiais que não possuem raízes racionais, mas que tenham com raízes números dados por expressões envolvendo funções trigonométricas!

Para encontrar esses tipos de equações utilizaremos as identidades trigonométricas conhecidas, começando com o cosseno e o seno do arco duplo:

Fórmulas dos arcos duplos!!

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - sen^2\theta \qquad \text{(I)}$$

$$\text{sen}\, 2\theta = 2\, \text{sen}\theta \cdot cos\theta \qquad \text{(II)}$$

Para encontrar a primeira equação polinomial envolvendo funções trigonométricas, calculemos o cosseno do arco triplo, de forma a aparecer apenas a função cosseno na expressão final da identidade:

Arco triplo cosseno:

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) &= \cos 2\theta \cdot \cos\theta - sen\, 2\theta \cdot sen\,\theta \\
&= (\cos^2\theta - sen^2\theta)\cdot\cos\theta - (2\, sen\,\theta \cdot \cos\theta)\cdot sen\,\theta \\
&= \cos^3\theta - sen^2\theta\cdot\cos\theta - 2\, sen^2\theta \cdot \cos\theta \\
&= \cos^3\theta - 3\, sen^2\theta \cdot \cos\theta \\
&= \cos^3\theta - 3\,(1-\cos^2\theta)\cdot\cos\theta \\
&= \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

Escolho um ângulo θ do qual conheço o $\cos 3\theta$:

$$\theta = 20° \Rightarrow \cos 3\theta = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$x = \cos 20°$ é raiz de

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x \Rightarrow 8x^3 - 6x - 1 = 0$$

Figura 22: A escolha do ângulo propício para encontrar uma equação polinomial que não tem raízes racionais, da qual uma função trigonométrica é solução.

Essa última equação já nos é conhecida e apareceu na Seção 4, quando provamos o seguinte fato

Toda raiz real de $8x^3 - 6x - 1 = 0$ é irracional

Figura 23: Fato já provado na Seção 4.

Ora, vimos que $x = cos20^0$ é raiz dessa equação, donde segue que $x = cos20^0 \notin \mathbb{Q}$.

De forma análoga pode-se provar que $sen10^0 \notin \mathbb{Q}$. Para isso, basta utilizar o seno do arco triplo para chegar em alguma equação polinomial que não tenha equação racional, mas que $x = sen10^0$ seja uma raiz dessa equação:

$$sen\ 3\theta = 3\ sen\ \theta\ - 4\ sen^3\theta$$

Considerando $x = sen\ 10°$, temos

$$sen\ 30° = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = 3\ sen\ 10°\ - 4\ sen^3 10°$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} = 3x\ - 4x^3$$
$$\Rightarrow 8x^3 - 6x + 1 = 0$$

A seguir, procede-se da mesma maneira, como fizemos anteriormente, para concluir que $sen10^0 \notin \mathbb{Q}$.

Alternativamente, poderíamos usar o fato de $cos20^0 \notin \mathbb{Q}$ para provar que $sen10^0 \notin \mathbb{Q}$. Para isso, basta utilizar a identidade

$$\cos 2\theta = 1 - 2sen^2\theta$$

e usando um argumento de contradição, pois, caso $sen10^0 \in \mathbb{Q}$ teríamos:

$$sen\ 10° \in \mathbb{Q} \Rightarrow sen\ 10° = r \in \mathbb{Q}$$
$$\Rightarrow \cos 20^0 = 1 - 2r^2 \in \mathbb{Q} \quad \textbf{ABSURDO!!!}$$
$$\boxed{\Rightarrow sen\ 10°\ \notin \mathbb{Q}}$$

Argumentando da mesma maneira e utilizando das identidades trigonométricas, pode-se provar o seguinte resultado:

$$\cos 2\theta \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta \notin \mathbb{Q} \\ sen\ \theta \notin \mathbb{Q} \\ \text{tg}\ \theta \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Figura 24: Como encontrar outros valores envolvendo funções trigonométricas, conhecendo a irracionalidade de um número dado pelo cosseno de um arco.

Para isso, basta utilizar certas identidades trigonométricas envolvendo o $cos2\theta$ e cada uma dessas funções do lado direito da implicação, e argumentar por absurdo:

$\cos 2\theta \notin \mathbb{Q}$:

- $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \quad \Rightarrow \cos\theta \notin \mathbb{Q}$
- $\cos 2\theta = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,\theta \quad \Rightarrow \mathrm{sen}\,\theta \notin \mathbb{Q}$

No caso da tangente, usa-se a identidade

$$1 + \mathrm{tg}^2\,\theta = sec^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\,\theta}$$

Juntamente com a primeira identidade da penúltima figura e usa-se o argumento de contradição:

$$tg\theta \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \cos^2\theta \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \cos 2\theta \in \mathbb{Q}$$

ABSURDO!!!

Com os resultados anteriores, seguem-se vários exemplos de números irracionais:

Da irracionalidade de $\cos 20°$, concluímos a irracionalidade de:

$\cos 10°$	$\mathrm{sen}\ 10°$	$\mathrm{tg}\ 10°$
$\cos 5°$	$\mathrm{sen}\ 5°$	$\mathrm{tg}\ 5°$
$\cos 2°\,30'$	$\mathrm{sen}\ 2°\,30'$	$\mathrm{tg}\ 2°\,30'$
$\cos 1°\,15'$	$\mathrm{sen}\ 1°\,15'$	$\mathrm{tg}\ 1°\,15'$
$\cos\ 37'30''$	$\mathrm{sen}\ 37'30''$	$\mathrm{tg}\ 37'30''$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Figura 25: Exemplos de números irracionais dados por funções trigonométricas.

6. Alguns fatos interessantes sobre números irracionais

Cabe-nos ressaltar nesse final de nossa aula, que, sobre os números racionais parece estar tudo estabelecido na Matemática, porém, o mesmo não ocorre com os números irracionais, há muito ainda por conhecer, questionar e demonstrar sobre esses números. Por esse motivo, é fácil fazer perguntas simples sobre números irracionais que recaem em respostas que, para encontrá-las, necessita-se de matemática bem mais avançada do que se estuda em cursos de graduação, ou pode-se cair em perguntas para as quais ainda não se tem respostas.

Por exemplo, sabemos os seguintes fatos:

$$e \notin \mathbb{Q}$$
$$\pi \notin \mathbb{Q}$$
$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Figura 26: Uns dos números irracionais mais conhecidos.

No entanto, ainda não se sabe as respostas das perguntas:

$$e + \pi \notin \mathbb{Q}\,?$$
$$e \cdot \pi \notin \mathbb{Q}\,?$$
$$2^e \notin \mathbb{Q}\,?$$
$$\ln \pi \notin \mathbb{Q}\,?$$
$$\pi^e \notin \mathbb{Q}\,?$$
$$\pi^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}\,?$$

Figura 27: Perguntas em aberto, que não se tem ainda respostas para elas.

Concluímos com uma demonstração da irracionalidade de um valor de uma função trigonométrica dado por um número de aparência bem simples:

$$cos\ 1^\circ \notin \mathbb{Q}$$

Figura 28: Exemplo de um número irracional dado por um "simples" valor.

Para demonstrar esse fato, usa-se a seguinte identidade

$$\bullet \cos(n^\circ + 1) = 2\cos n^\circ \cdot \cos 1^\circ - \cos(n^\circ - 1)$$

decorrente da soma das identidades

$$\bullet \cos(n^\circ + 1^\circ) = \cos n^\circ \cdot \cos 1^\circ - sen\, n^\circ \cdot sen\, 1^\circ$$

$$\bullet \cos(n^\circ - 1^\circ) = \cos n^\circ \cdot \cos 1^\circ + sen\, n^\circ \cdot sen\, 1^\circ$$

A partir desse ponto é só utilizar o método de demonstração por absurdo e fazer um raciocínio indutivo:

$$\cos(n^\circ + 1^\circ) = 2\cos n^\circ \cdot \cos 1^\circ - \cos(n^\circ - 1^\circ)$$

Suponha $\cos 1^\circ \in \mathbb{Q}$

$\cos 1^\circ \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cos 2^\circ = 2\cos^2 1^\circ - 1 \ \in \mathbb{Q}$

$\cos 2^\circ \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cos 3^\circ = 2\cos 2^\circ \cos 1^\circ - \cos 1^\circ \ \in \mathbb{Q}$

$\cos 3^\circ \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cos 4^\circ = 2\cos 3^\circ \cos 1^\circ - \cos 2^\circ \ \in \mathbb{Q}$

$\cos 4^\circ \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cos 5^\circ = 2\cos 4^\circ \cos 1^\circ - \cos 3^\circ \ \in \mathbb{Q}$

$\vdots$

$\cos 29^\circ \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cos 30^\circ = 2\cos 29^\circ \cos 1^\circ - \cos 28^\circ \in \mathbb{Q}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \ \in \mathbb{Q}$ **ABSURDO!!!**

77 PAPMEM - Julho 2023 – Prof. Daniel Cordeiro

Figura 29: Demonstração na qual se usam argumento de contradição e um processo indutivo.

Bem, contamos que agora nossas alunas e nossos alunos possam ter, ao dispor, vários exemplos de números irracionais, além daqueles que comumente são exibidos quando se estuda o assunto!

7. Referências Bibliográficas

[1] ANDREESCU, Titu; FENG, Zuming. **103 Trigonometry problems:** from the training of the USA IMO Team. 2. ed. Boston: Birkhäuser, 2005.

[2] DE MORAIS FILHO, Daniel C. et al. **Dez ou onze temas interessantes de matemática elementar.** Campina Grande: EDUFCG, 2015.

[3] FIGUEIREDO, Djairo G. de**. Números Irracionais e Transcendentes.** 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[4] NIVEN, Ivan. **Números Racionais e Irracionais**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM & MAAA, 2012.

[5] HEFEZ, Abramo. **Aritmética,** 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.