Contando retas em superfícies no espaço projetivo

Jacqueline Rojas - UFPB

Sally Andria - UFF

Wállace Mangueira - UFPB

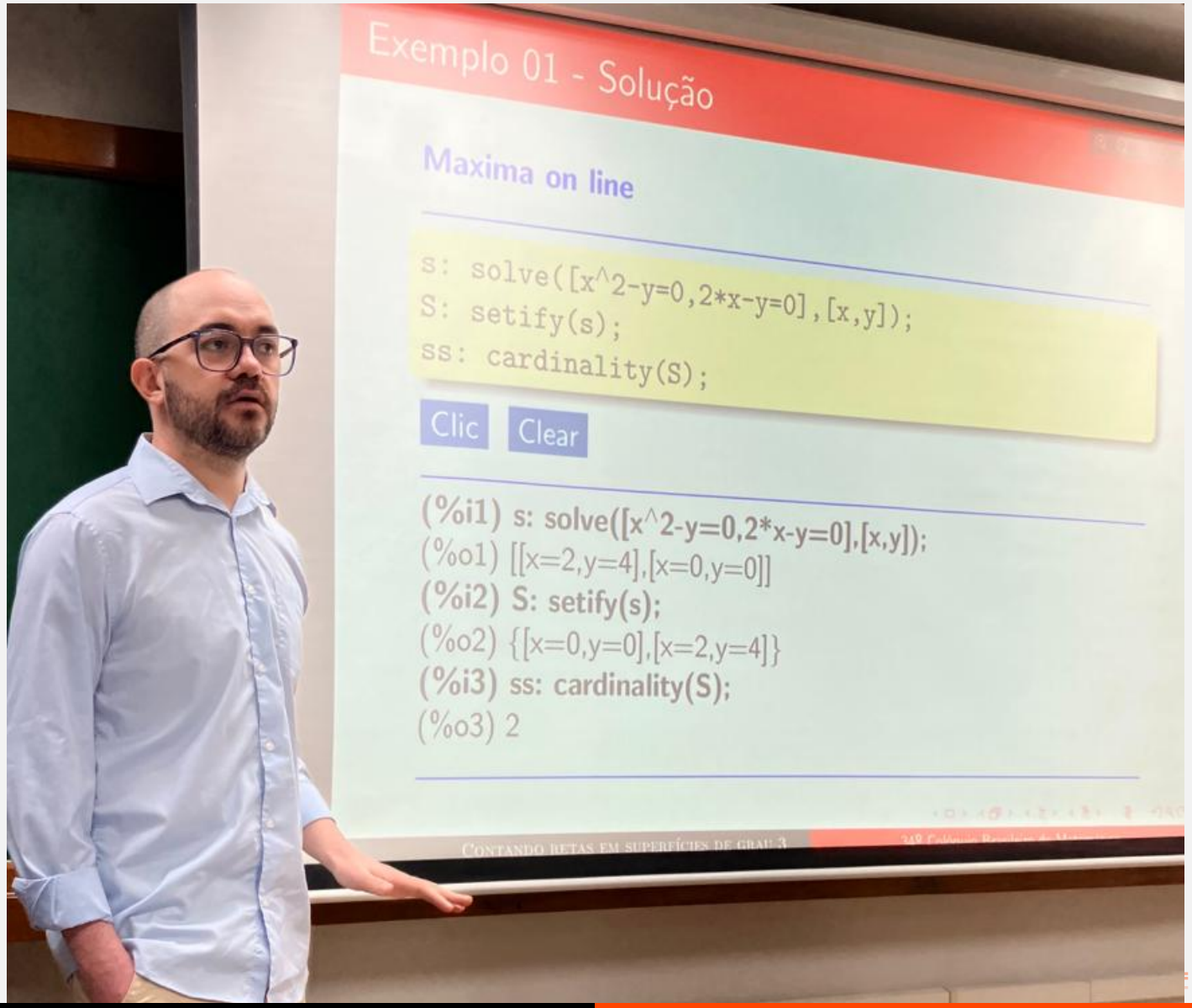
Julho 2023

Recapitulando

Aula 1: Qual o problema? Levels 1 e 2

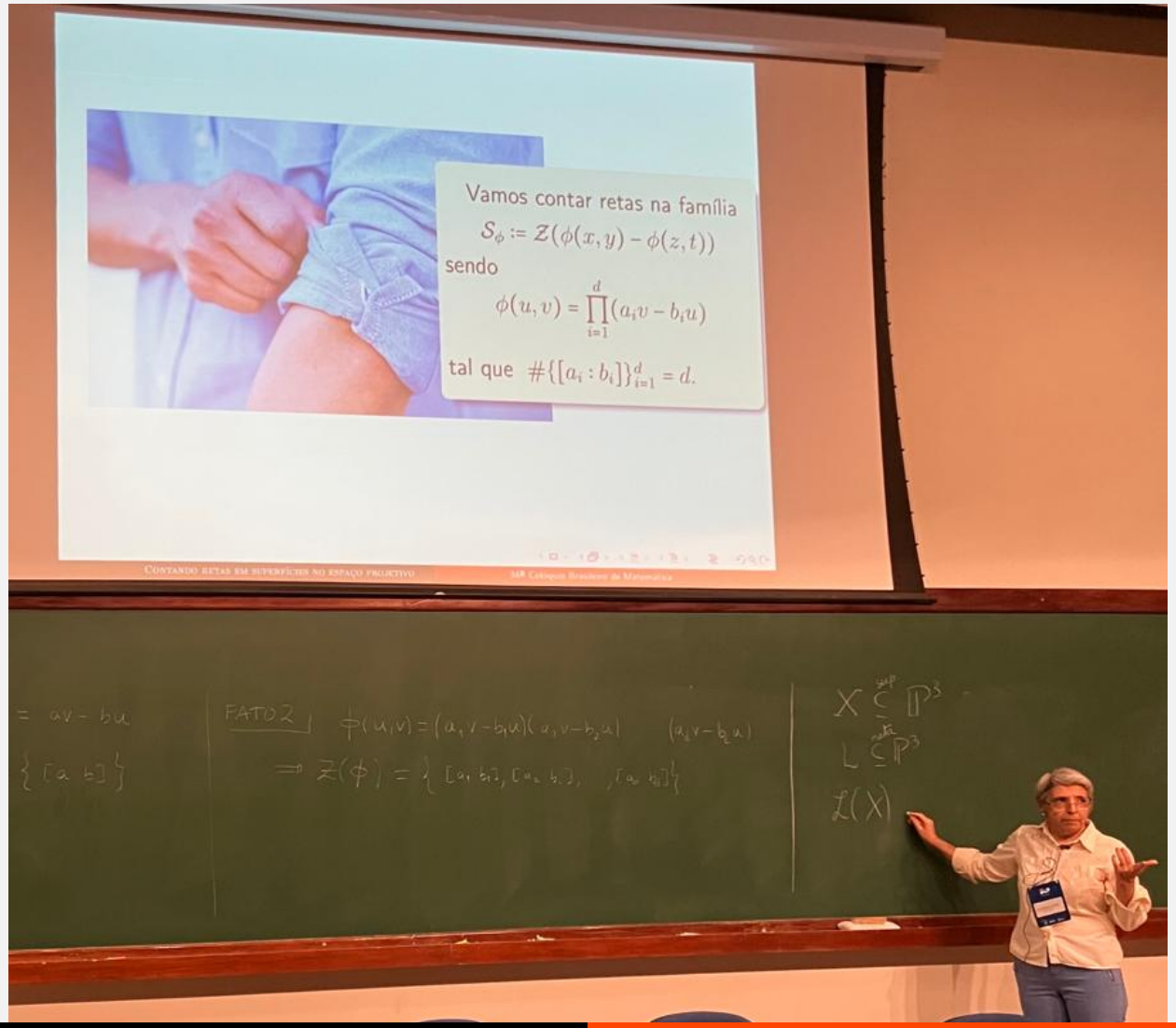
Aula 2: Acabou a brincadeira! Level 3

Monitoria 1: Contando retas com o Máxima

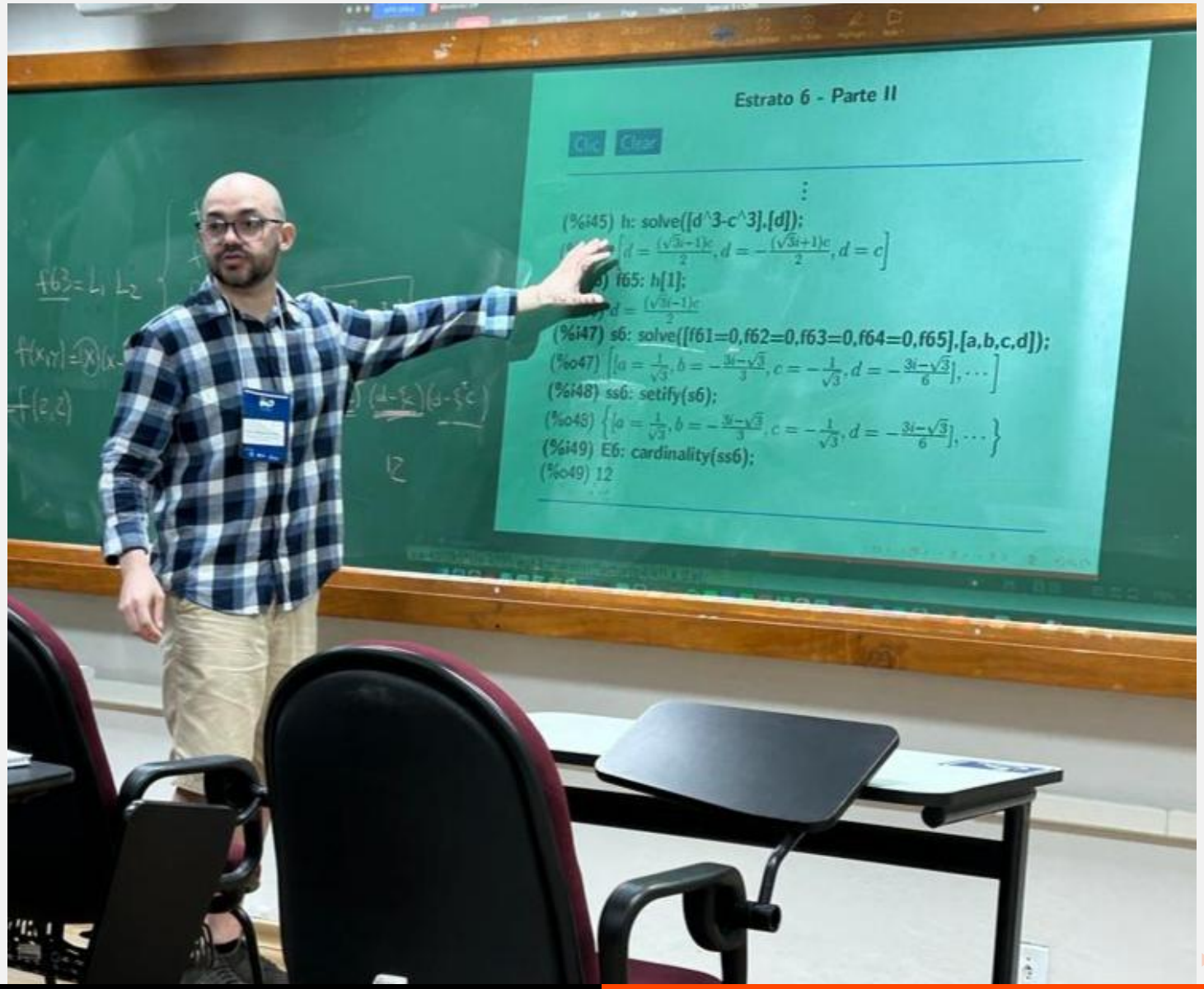


Aula 3: Level 4

Aula 4: Arregaçando as mangas! Contanto retas numa família de superfícies.



Monitoria 2: O Maxima e suas limitações



Se não dá pra contar... dá pra estimar!

O problema foi reduzido para

Qual é a quantidade máxima de retas
que uma superfície não singular de grau $d \geq 5$ em $\mathbb{P}^3$ contém?

Já sabemos que, até agora, a questão está em aberto.
O estudo de cotas nos ajuda a ter ao menos uma ideia do que está acontecendo em cada caso.
Vamos denotar a resposta exata à pergunta por $\mathfrak{r}_d$.

$$\mathfrak{r}_d = \max\left\{\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}))|\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3 \text{ é superfície não singular de grau } d \geq 5\right\}.$$

Uma cortesia de Fermat: cota inferior

A **superfície de Fermat de grau** d em $\mathbb{P}^3$ é definida por

$$\mathcal{F}_d := \mathcal{Z}(x^d + y^d + z^d + t^d)$$

é não singular. E vimos ontem que

$$\#(\mathfrak{L}(\mathcal{F}_d)) \geq 3d^2,$$

que implica, para $d \geq 3$, em

$$3d^2 \leq \mathfrak{r}_d.$$

E a cota da família da aula de ontem?!

Os valores eram

$$\begin{cases} N_d = 3d^2, & \text{se } d \notin \{4,6,8,12,20\}, \\ N_4 = 64,\ N_6 = 180,\ N_8 = 256,\ N_{12} = 864 & \text{e } N_{20} = 1600. \end{cases}$$

Comparando com a cota de Fermat, para $d \in \{4,6,8,12,20\}$, temos

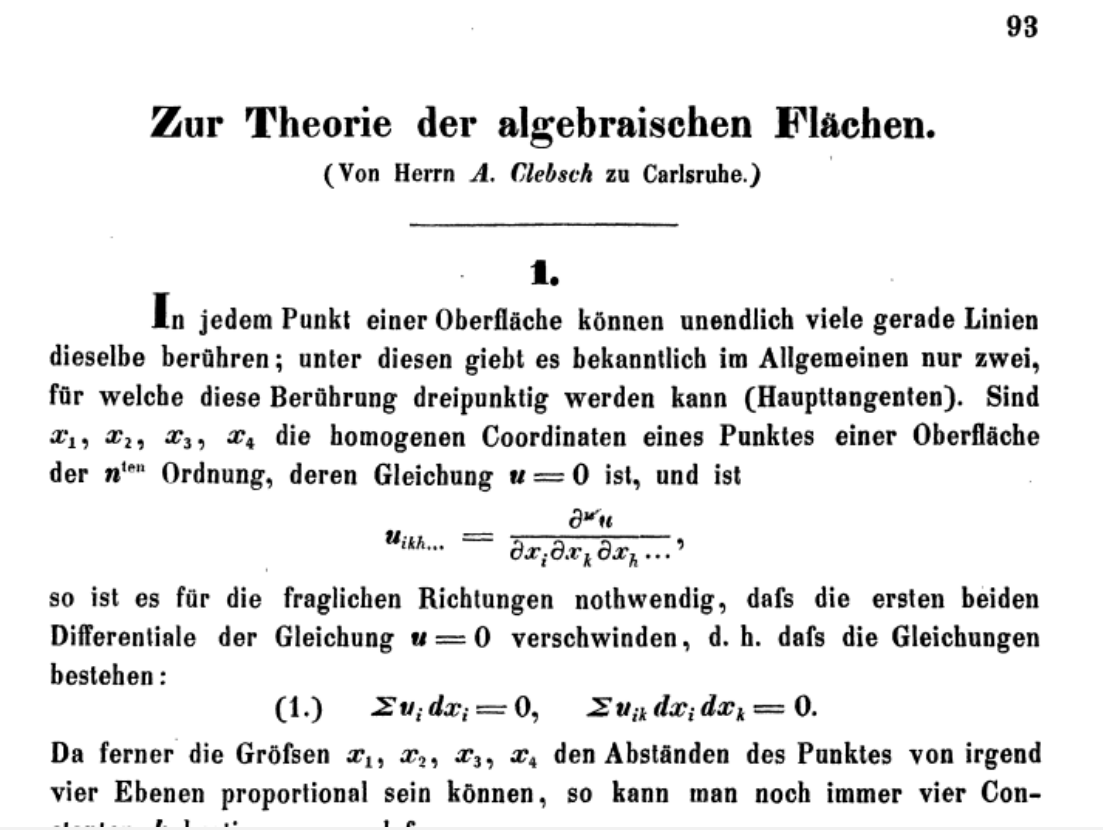
Grau $\mathbf{d}$	Fermat $\mathbf{3d^2}$	$\mathcal{S}_\phi$ $\mathbf{N_d}$
4	48	64
6	108	180
8	192	256
12	432	864
20	1200	1600

Assim, $3d^2 < N_d \leq \mathfrak{r}_d$ para $d \in \{6,8,12,20\}$.

Cota superior de Clebsh

Em 1861, Clebsh publicou um artigo.

Alfred Clebsch



93

Zur Theorie der algebraischen Flächen.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

1.

In jedem Punkt einer Oberfläche können unendlich viele gerade Linien dieselbe berühren; unter diesen giebt es bekanntlich im Allgemeinen nur zwei, für welche diese Berührung dreipunktig werden kann (Haupttangenten). Sind x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Coordinaten eines Punktes einer Oberfläche der n^{ten} Ordnung, deren Gleichung $u = 0$ ist, und ist

$$u_{ikh\ldots} = \frac{\partial^n u}{\partial x_i \partial x_k \partial x_h \ldots},$$

so ist es für die fraglichen Richtungen nothwendig, dafs die ersten beiden Differentiale der Gleichung $u = 0$ verschwinden, d. h. dafs die Gleichungen bestehen:

$$(1.) \qquad \Sigma u_i \, dx_i = 0, \qquad \Sigma u_{ik} \, dx_i \, dx_k = 0.$$

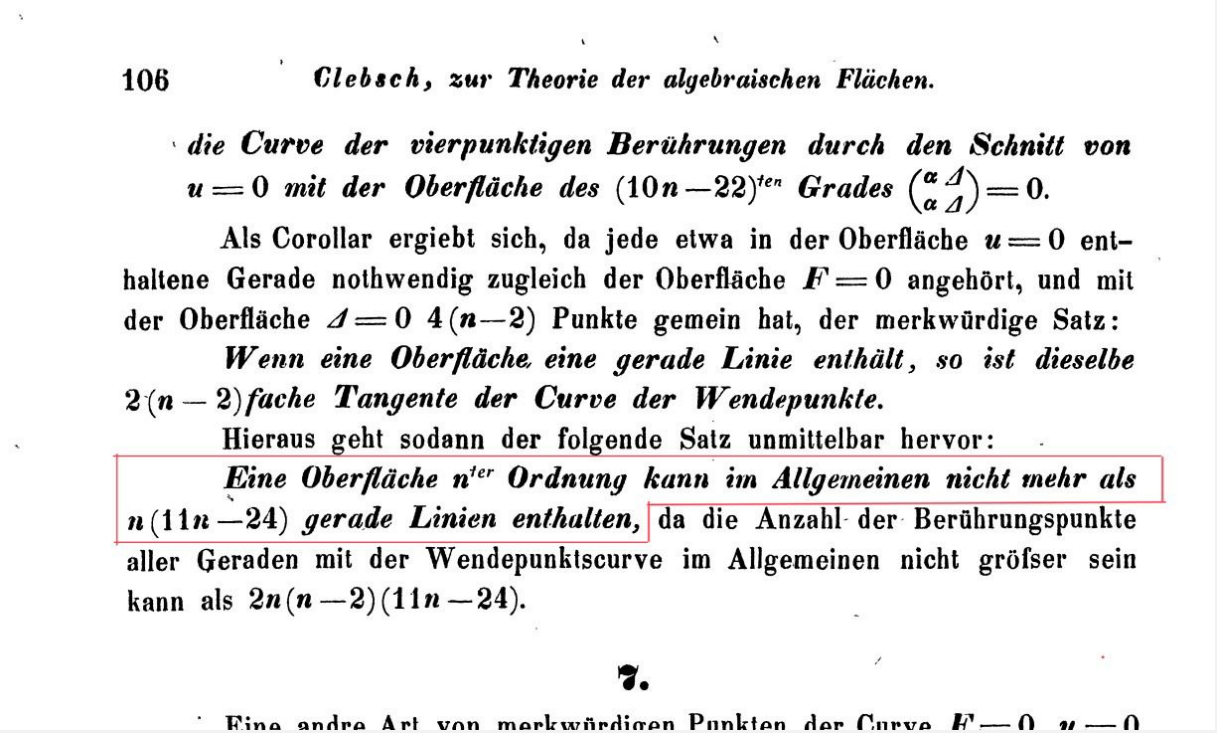
Da ferner die Gröfsen x_1, x_2, x_3, x_4 den Abständen des Punktes von irgend vier Ebenen proportional sein können, so kann man noch immer vier Con-

Cota superior de Clebsh

Em 1861, Clebsh publicou um artigo apresentando uma cota superior

$$\mathfrak{r}_d \leq \mathfrak{c}_d := d(11d - 24), \quad \text{para todo } d \geq 3.$$

Alfred Clebsch



106 *Clebsch, zur Theorie der algebraischen Flächen.*

die Curve der vierpunktigen Berührungen durch den Schnitt von $u = 0$ mit der Oberfläche des $(10n-22)^{ten}$ Grades $\begin{pmatrix} \alpha & \Delta \\ \alpha & \Delta \end{pmatrix} = 0$.

Als Corollar ergiebt sich, da jede etwa in der Oberfläche $u = 0$ enthaltene Gerade nothwendig zugleich der Oberfläche $F = 0$ angehört, und mit der Oberfläche $\Delta = 0$ $4(n-2)$ Punkte gemein hat, der merkwürdige Satz:

Wenn eine Oberfläche eine gerade Linie enthält, so ist dieselbe $2(n-2)$fache Tangente der Curve der Wendepunkte.

Hieraus geht sodann der folgende Satz unmittelbar hervor:

Eine Oberfläche n^{ter} Ordnung kann im Allgemeinen nicht mehr als $n(11n-24)$ gerade Linien enthalten, da die Anzahl der Berührungspunkte aller Geraden mit der Wendepunktscurve im Allgemeinen nicht gröfser sein kann als $2n(n-2)(11n-24)$.

7.

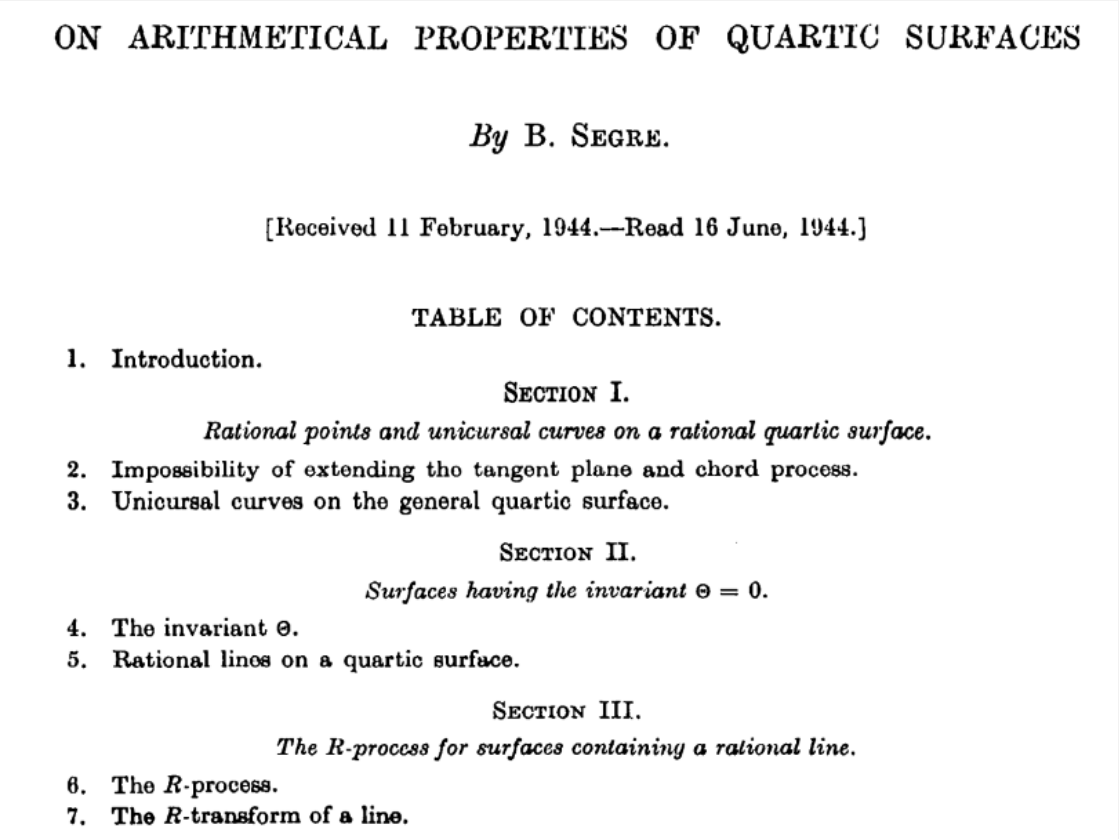
Eine andre Art von merkwürdigen Punkten der Curve $F = 0$, $u = 0$

Cota superior de Segre

Em 1947, 86 anos depois de Clebsh, Segre provou que

$$\mathfrak{r}_d \leq \mathfrak{s}_d := (d-2)(11d-6), \ \forall\, d \geq 3.$$

Beniamino Segre



ON ARITHMETICAL PROPERTIES OF QUARTIC SURFACES

By B. SEGRE.

[Received 11 February, 1944.—Read 16 June, 1944.]

TABLE OF CONTENTS.

1. Introduction.

SECTION I.

Rational points and unicursal curves on a rational quartic surface.

2. Impossibility of extending the tangent plane and chord process.
3. Unicursal curves on the general quartic surface.

SECTION II.

Surfaces having the invariant $\Theta = 0$.

4. The invariant Θ.
5. Rational lines on a quartic surface.

SECTION III.

The R-process for surfaces containing a rational line.

6. The R-process.
7. The R-transform of a line.

Batalha de cotas!

Batalha de cotas!

Batalha de cotas!

A melhor cota até agora! (27/07/23)

Em 2022, Bauer–Rams encontraram a melhor cota superior para $\mathfrak{r}_d$

$$\mathfrak{r}_d \leq \mathfrak{b}_d := 11d^2 - 30d + 18, \ \forall\, d \geq 3.$$

Thomas Bauer

Slawomir Rams

Compara com as anteriores, que eu quero ver!

Observe que ao compararmos as três cotas para $d = 3$, temos

$$\mathfrak{r}_3 = 27 = \mathfrak{b}_d = \mathfrak{s}_3 = \mathfrak{c}_3.$$

Compara com as anteriores, que eu quero ver!

Observe que ao compararmos as três cotas para $d = 3$, temos

$$\mathfrak{r}_3 = 27 = \mathfrak{b}_d = \mathfrak{s}_3 = \mathfrak{c}_3.$$

Já para $d = 4$, temos que

$$\mathfrak{r}_4 = 64 < \mathfrak{b}_4 = 74 < \mathfrak{s}_4 = 76 < \mathfrak{c}_4 = 80.$$

Vendo tudo junto e misturado

Vamos colocar todas essas cotas e o $\mathfrak{r}_d$, todos juntos e misturados pra ver como fica?

Vendo tudo junto e misturado

Vamos colocar todas essas cotas e o $\mathfrak{r}_d$, todos juntos e misturados pra ver como fica?

Fazendo umas continhas, para todo $d \geq 3$, temos que

$$3d^2 \leq N_d \leq \mathfrak{r}_d \leq \mathfrak{b}_d \leq \mathfrak{s}_d \leq \mathfrak{c}_d,$$

valendo a igualdade para $d = 3$, quando retiramos o N_d da jogada.

Olhando a tabelinha de novo...

Para $d \in \{6, 8, 12, 20\}$, temos a seguinte tabela

Grau $\mathbf{d}$	Fermat $\mathbf{3d^2}$	$\mathcal{S}_\phi$ $\mathbf{N_d}$	Bauer–Rams $\mathbf{\mathfrak{b}_d}$
6	108	180	234
8	192	256	482
12	432	864	1242
20	1200	1600	3818

Assim, $3d^2 < N_d \leq \mathfrak{r}_d \leq \mathfrak{b}_d$ para $d \in \{6, 8, 12, 20\}$.

A melhor cota para grau $d = 5$

Em 2020, Rams–Schütt demonstraram o seguinte

Teorema (Rams–Schütt)

Se $S \subset \mathbb{P}^3$ é uma superfície não singular de grau 5, então

Matthias Schutt

Slawomir Rams

A melhor cota para grau $d = 5$

Em 2020, Rams–Schütt demonstraram o seguinte

Teorema (Rams–Schütt)

Se $S \subset \mathbb{P}^3$ é uma superfície não singular de grau 5, então

Note que a cota de Bauer–Rams para as quínticas é $\mathfrak{b}_5 = 143$.

Matthias Schutt

Slawomir Rams

A melhor cota para grau $d = 5$

Em 2020, Rams–Schütt demonstraram o seguinte

Teorema (Rams–Schütt)

Se $S \subset \mathbb{P}^3$ é uma superfície não singular de grau 5, então $\mathfrak{r}_5 \leq 127$.

Note que a cota de Bauer–Rams para as quínticas é $\mathfrak{b}_5 = 143$.

Matthias Schutt

Slawomir Rams

E agora?

E agora?

- Você pode trabalhar neste problema!

E agora?

- Você pode trabalhar neste problema!
- Ou outros problemas relacionados!

E agora?

- Você pode trabalhar neste problema!
- Ou outros problemas relacionados!

É o quê, doido?

Contar outras coisas em outros lugares?!

- É possível contar retas em superfícies que morem em outros lugares além do $\mathbb{P}^3$!

Contar outras coisas em outros lugares?!

- É possível contar retas em superfícies que morem em outros lugares além do $\mathbb{P}^3$!
- É possível estudar o conjunto das retas contidas, procurando saber o número máximo de retas 2 a 2 disjuntas.

Contar outras coisas em outros lugares?!

- É possível contar retas em superfícies que morem em outros lugares além do $\mathbb{P}^3$!
- É possível estudar o conjunto das retas contidas, procurando saber o número máximo de retas 2 a 2 disjuntas.
- É possível contar outras coisas além de retas, como curvas!

Foi um prazer apresentar este multiverso pra vocês!

Nos vemos por aí e no instaverso:

@jacque.rojas.a

@matematicaeobicho

@prof.wallacesousa

"That's all Folks!"