Contando retas em superfícies no espaço projetivo

Jacqueline Rojas - UFPB

Sally Andria - UFF

Wállace Mangueira - UFPB

Julho 2023

Aula 04, Quinta-feira 27/07/2023

Se X é uma superfície não singular em $\mathbb{P}^3$ de grau d, então

$$\mathfrak{L}(\mathrm{X}) := \{ \text{ retas contidas na superfície } \mathrm{X} \}$$

Aula 04, Quinta-feira 27/07/2023

Se X é uma superfície não singular em $\mathbb{P}^3$ de grau d, então

$$\mathfrak{L}(\mathrm{X}) := \{ \text{ retas contidas na superfície } \mathrm{X}\}$$

e

$$\mathfrak{r}_d := \max\left\{\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X})) \mid \mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3 \ \begin{array}{l}\text{é uma superfície não} \\ \text{singular de grau } d\end{array}\right\}.$$

- $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_2 = \infty$.

- $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_2 = \infty$.
- $\mathfrak{r}_3 = 27$ (Cayley-Salmon 1849).

- $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_2 = \infty$.
- $\mathfrak{r}_3 = 27$ (Cayley-Salmon 1849).
- Em 1943 Segre "mostrou" que $\mathfrak{r}_4 = 64$.

- $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_2 = \infty$.
- $\mathfrak{r}_3 = 27$ (Cayley-Salmon 1849).
- Em 1943 Segre "mostrou" que $\mathfrak{r}_4 = 64$.
- Em 2015, Rams-Schütt descobriram um erro na prova de Segre, que foi contornado por eles. Assim, $\mathfrak{r}_4 = 64$ mesmo!

- $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_2 = \infty$.
- $\mathfrak{r}_3 = 27$ (Cayley-Salmon 1849).
- Em 1943 Segre "mostrou" que $\mathfrak{r}_4 = 64$.
- Em 2015, Rams-Schütt descobriram um erro na prova de Segre, que foi contornado por eles. Assim, $\mathfrak{r}_4 = 64$ mesmo!

$\mathfrak{r}_d$ ainda não foi determinado para $d \geq 5$.

E aí, os que se interessam por esse problema (o próprio Segre, entre outros) têm-se debruçado sobre a determinação de cotas para $\mathfrak{r}_d$.

E aí, os que se interessam por esse problema (o próprio Segre, entre outros) têm-se debruçado sobre a determinação de cotas para $\mathfrak{r}_d$.

Uma forma de obter cotas é através do cálculo do número de retas em certas famílias de superfícies.

E aí, os que se interessam por esse problema (o próprio Segre, entre outros) têm-se debruçado sobre a determinação de cotas para $\mathfrak{r}_d$.

Uma forma de obter cotas é através do cálculo do número de retas em certas famílias de superfícies.

Por exemplo, a partir da família das superfícies de Fermat

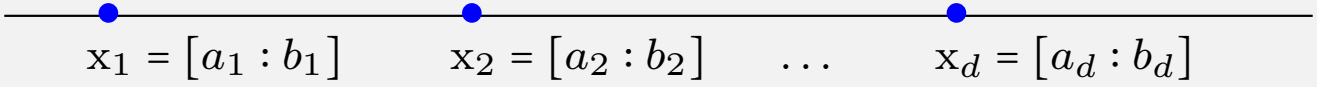
$$x^d + y^d + z^d + t^d = 0,$$

concluíse que $\mathfrak{r}_d \geq 3d^2$ se $d \geq 3$.

Famíla gerada por d pontos distintos em $\mathbb{P}^1$.

Famíla gerada por d pontos distintos em $\mathbb{P}^1$.

Observe que a partir dos d pontos distintos $\mathrm{x}_1 \ldots, \mathrm{x}_d$,

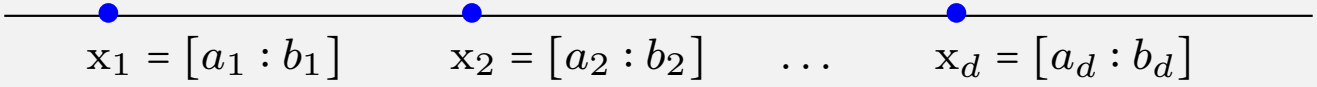


obtem-se o polinômio homogêneo de grau d

$$\phi(u, v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u, v].$$

Famíla gerada por d pontos distintos em $\mathbb{P}^1$.

Observe que a partir dos d pontos distintos $\mathrm{x}_1 \ldots, \mathrm{x}_d$,



obtem-se o polinômio homogêneo de grau d

$$\phi(u,v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u) \in \mathbb{C}[u,v].$$

Ao qual podemos associar a superfície não singular

$$\mathcal{S}_\phi := \mathcal{Z}(\phi(x,y) - \phi(z,t)) \subset \mathbb{P}^3.$$

Mais geralmente,

$$\text{se } \phi, \psi \in \mathbb{C}[u, v] \text{ são homogêneos de grau } d \text{ tais que seus zeros em } \mathbb{P}^1 \text{ consistem de } d \text{ pontos distintos,} \tag{1}$$

então

$$\boxed{\mathcal{S}_{\phi,\psi} := \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \psi(z, t)) \subset \mathbb{P}^3}$$

é uma superfície não singular de grau d.

Mais geralmente,

$$\text{se } \phi, \psi \in \mathbb{C}[u, v] \text{ são homogêneos de grau } d \text{ tais que seus zeros em } \mathbb{P}^1 \text{ consistem de } d \text{ pontos distintos,} \tag{1}$$

então

$$\mathcal{S}_{\phi,\psi} := \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \psi(z, t)) \subset \mathbb{P}^3$$

é uma superfície não singular de grau d.

Ao considerar

$$N_d := \max\{\#(\mathfrak{L}(\mathcal{S}_{\phi,\psi})) \mid \phi,\ \psi \text{ satisfazem } (1)\}.$$

Mais geralmente,

$$\text{se } \phi, \psi \in \mathbb{C}[u,v] \text{ são homogêneos de grau } d \text{ tais que seus zeros em } \mathbb{P}^1 \text{ consistem de } d \text{ pontos distintos,} \tag{1}$$

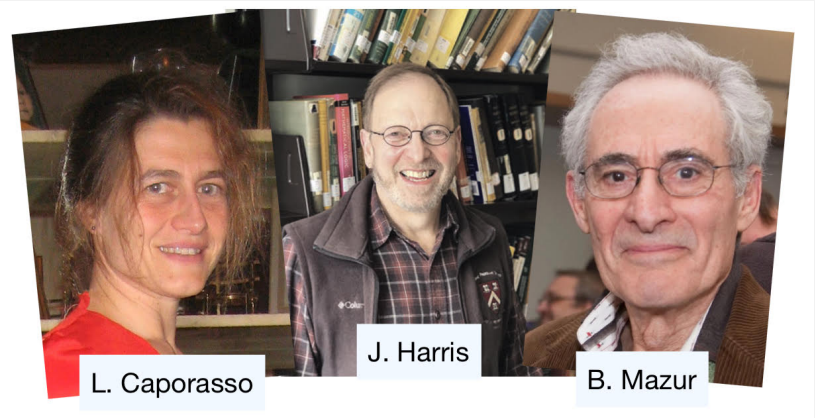
então

$$\mathcal{S}_{\phi,\psi} := \mathcal{Z}(\phi(x,y) - \psi(z,t)) \subset \mathbb{P}^3$$

é uma superfície não singular de grau d.

Ao considerar

$$N_d := \max\{\#(\mathfrak{L}(\mathcal{S}_{\phi,\psi})) \mid \phi,\ \psi \text{ satisfazem } (1)\}.$$



Caporaso, L., J. Harris e B. Mazur (1995). "How many rational points can a curve have?" Em: The moduli space of curves (Texel Island, 1994). Vol. 129. Progr. Math. Birkhäuser Boston, Boston, MA, pp. 13–31.

Mostraram que:

$$\begin{cases} N_d \geq 3d^2 \quad \text{se } d \notin \{4,6,8,12,20\}, \\ N_4 \geq 64,\ N_6 \geq 180,\ N_8 \geq 256,\ N_{12} \geq 864 \ \text{ e } \ N_{20} \geq 1600. \end{cases}$$

Em 2007

Alessandra Sarti

Boissière, S. e A. Sarti (2007). "Counting lines on surfaces". Em: Ann. Sc. Norm.Super. Pisa Cl. Sci. (5) 6.1, pp. 39–52

Samuel Boissière

Mostraram que vale a igualdade.

Em 2007

Alessandra Sarti

Boissière, S. e A. Sarti (2007). "Counting lines on surfaces". Em: Ann. Sc. Norm.Super. Pisa Cl. Sci. (5) 6.1, pp. 39–52

Samuel Boissière

Mostraram que vale a igualdade.
Assim,

$$\begin{cases} N_d = 3d^2 \quad \text{se } d \notin \{4,6,8,12,20\}, \\ N_4 = 64,\ N_6 = 180,\ N_8 = 256,\ N_{12} = 864 \ \text{ e } \ N_{20} = 1600. \end{cases}$$

Avisos comerciais!

Avisos comerciais!

Sally Andria Vieira da Silva UFF

RMU
REVISTA MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Revista Matemática Universitária, vol. 1, 2022
ISSN: 2675-5254 — **DOI:** 10.21711/26755254/rmu20223

KLEIN NOS AJUDA CONTAR RETAS EM SUPERFÍCIES PROJETIVAS

JACQUELINE ROJAS E SALLY ANDRIA

Resumo. Os grupos de simetrias por rotações dos Sólidos Platônicos reaparecem no *Teorema de classificação dos subgrupos finitos de* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, dado por *F. Klein* em 1870. Neste artigo veremos como este teorema pode ser utilizado na contagem de retas em certas superfícies projetivas não singulares, seguindo as linhas do artigo *Counting lines on surfaces* de *Boissière* & *Sarti* publicado em 2007 (cf. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 5).

Concretamente na família $\mathcal{S}_\phi := \mathcal{Z}(\phi(x,y) - \phi(z,t))$

Vamos contar retas na família

$$\mathcal{S}_\phi := \mathcal{Z}(\phi(x,y) - \phi(z,t))$$

sendo

$$\phi(u,v) = \prod_{i=1}^{d}(a_i v - b_i u)$$

tal que $\#\{[a_i : b_i]\}_{i=1}^{d} = d$.

Considere a reta $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t)$ em $\mathbb{P}^3$.

Note que, para cada reta $\ell \subset \mathcal{S}_\phi := \mathcal{Z}(\phi(x,y) - \phi(z,t))$, temos as seguintes possibilidades:

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \qquad \text{ou} \qquad \ell \cap \mathrm{L} = \varnothing.$$

Assim, os conjuntos:

$$\mathcal{L}_\phi := \Big\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\Big\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}'_\phi := \Big\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} = \varnothing\Big\},$$

determinam uma partição do conjunto constituído por todas as retas na superfície $\mathcal{S}_\phi$, ou seja,

$$\Big\{\text{ retas contidas em } \mathcal{S}_\phi\Big\} = \mathcal{L}_\phi \,\dot{\cup}\, \mathcal{L}'_\phi.$$

Considere a reta $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t)$ em $\mathbb{P}^3$.

Note que, para cada reta $\ell \subset \mathcal{S}_\phi := \mathcal{Z}(\phi(x,y) - \phi(z,t))$, temos as seguintes possibilidades:

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \qquad \text{ou} \qquad \ell \cap \mathrm{L} = \varnothing.$$

Assim, os conjuntos:

$$\mathcal{L}_\phi := \Big\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\Big\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}'_\phi := \Big\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} = \varnothing\Big\},$$

determinam uma partição do conjunto constituído por todas as retas na superfície $\mathcal{S}_\phi$, ou seja,

$$\Big\{\text{ retas contidas em } \mathcal{S}_\phi\Big\} = \mathcal{L}_\phi \,\dot\cup\, \mathcal{L}'_\phi.$$

Assim,

$$n_\phi := \#\Big\{\text{ retas contidas em } \mathcal{S}_\phi\Big\} = \#(\mathcal{L}_\phi) + \#(\mathcal{L}'_\phi).$$

Cálculo de $\#(\mathcal{L}_\phi)$. Lembre que $\mathcal{S}_\phi := \mathcal{Z}(\phi(x,y) - \phi(z,t))$ sendo

$$\phi(u,v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u).$$

Observe que:

Cálculo de $\#(\mathcal{L}_\phi)$. Lembre que $\mathcal{S}_\phi := \mathcal{Z}(\phi(x,y) - \phi(z,t))$ sendo

$$\phi(u,v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u).$$

Observe que:

- $\mathrm{L} \cap \mathcal{S}_\phi = \{\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_d\}$ sendo $\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ se $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t)$.

Cálculo de $\#(\mathcal{L}_\phi)$. Lembre que $\mathcal{S}_\phi := \mathcal{Z}(\phi(x,y) - \phi(z,t))$ sendo

$$\phi(u,v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u).$$

Observe que:

- $\mathrm{L} \cap \mathcal{S}_\phi = \{\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_d\}$ sendo $\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ se $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t)$.
- $\mathrm{M} \cap \mathcal{S}_\phi = \{\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_d\}$ sendo $\mathrm{q}_i = [0 : 0 : a_i : b_i]$ se $\mathrm{M} = \mathcal{Z}(x,y)$.

Cálculo de $\#(\mathcal{L}_\phi)$. Lembre que $\mathcal{S}_\phi := \mathcal{Z}(\phi(x,y) - \phi(z,t))$ sendo

$$\phi(u,v) = (a_1 v - b_1 u) \cdot (a_2 v - b_2 u) \cdots (a_d v - b_d u).$$

Observe que:

- $\mathrm{L} \cap \mathcal{S}_\phi = \{\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_d\}$ sendo $\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ se $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t)$.
- $\mathrm{M} \cap \mathcal{S}_\phi = \{\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_d\}$ sendo $\mathrm{q}_i = [0 : 0 : a_i : b_i]$ se $\mathrm{M} = \mathcal{Z}(x,y)$.
- Seja $\ell_{i,j}$ a única reta em $\mathbb{P}^3$ passando pelos pontos p_i e q_j. Assim,

$$\ell_{i,j} : \begin{cases} a_i y - b_i x = 0, \\ a_j z - b_j t = 0. \end{cases} \Longrightarrow \ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi \ \forall\, i,j \overset{\mathrm{p}_i \in \ell_{i,j}}{\Longrightarrow} \ell_{i,j} \in \mathcal{L}_\phi \ \forall\, i,j.$$

Cálculo de $\#(\mathcal{L}_\phi)$. Lembre que $\mathcal{S}_\phi := \mathcal{Z}(\phi(x,y) - \phi(z,t))$ sendo

$$\phi(u,v) = (a_1 v - b_1 u)\cdot(a_2 v - b_2 u)\cdots(a_d v - b_d u).$$

Observe que:

- $\mathrm{L} \cap \mathcal{S}_\phi = \{\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_d\}$ sendo $\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ se $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t)$.
- $\mathrm{M} \cap \mathcal{S}_\phi = \{\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_d\}$ sendo $\mathrm{q}_i = [0 : 0 : a_i : b_i]$ se $\mathrm{M} = \mathcal{Z}(x,y)$.
- Seja $\ell_{i,j}$ a única reta em $\mathbb{P}^3$ passando pelos pontos p_i e q_j. Assim,

$$\ell_{i,j} : \begin{cases} a_i y - b_i x = 0, \\ a_j z - b_j t = 0. \end{cases} \Longrightarrow \ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi \ \forall\, i,j \overset{\mathrm{p}_i \in \ell_{i,j}}{\Longrightarrow} \ell_{i,j} \in \mathcal{L}_\phi \ \forall\, i,j.$$

Proposição 1: Considere as retas $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t)$, $\mathrm{M} = \mathcal{Z}(x,y)$ e ℓ em $\mathbb{P}^3$. Se $d \geq 2$ e $\ell \subset \mathcal{S}_\phi$, então verifica-se que

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad \ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$$

Cálculo de $\#(\mathcal{L}_\phi)$. Lembre que $\mathcal{S}_\phi := \mathcal{Z}(\phi(x,y) - \phi(z,t))$ sendo

$$\phi(u,v) = (a_1 v - b_1 u)\cdot(a_2 v - b_2 u)\cdots(a_d v - b_d u).$$

Observe que:

- $\mathrm{L} \cap \mathcal{S}_\phi = \{\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_d\}$ sendo $\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ se $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t)$.
- $\mathrm{M} \cap \mathcal{S}_\phi = \{\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_d\}$ sendo $\mathrm{q}_i = [0 : 0 : a_i : b_i]$ se $\mathrm{M} = \mathcal{Z}(x,y)$.
- Seja $\ell_{i,j}$ a única reta em $\mathbb{P}^3$ passando pelos pontos p_i e q_j. Assim,

$$\ell_{i,j} : \begin{cases} a_i y - b_i x = 0, \\ a_j z - b_j t = 0. \end{cases} \Longrightarrow \ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi \ \forall\, i,j \overset{\mathrm{p}_i \in \ell_{i,j}}{\Longrightarrow} \ell_{i,j} \in \mathcal{L}_\phi \ \forall\, i,j.$$

Proposição 1: Considere as retas $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t)$, $\mathrm{M} = \mathcal{Z}(x,y)$ e ℓ em $\mathbb{P}^3$. Se $d \geq 2$ e $\ell \subset \mathcal{S}_\phi$, então verifica-se que

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad \ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$$

Corolário: $\mathcal{L}_\phi = \left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i,j \leq d\right\}$.

Portanto, $\#(\mathcal{L}_\phi) = d^2$.

Cálculo de $\#(\mathcal{L}_\phi)$. Lembre que $\mathcal{S}_\phi := \mathcal{Z}(\phi(x,y) - \phi(z,t))$ sendo

$$\phi(u,v) = (a_1 v - b_1 u)\cdot(a_2 v - b_2 u)\cdots(a_d v - b_d u).$$

Observe que:

- $\mathrm{L} \cap \mathcal{S}_\phi = \{\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_d\}$ sendo $\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ se $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t)$.
- $\mathrm{M} \cap \mathcal{S}_\phi = \{\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_d\}$ sendo $\mathrm{q}_i = [0 : 0 : a_i : b_i]$ se $\mathrm{M} = \mathcal{Z}(x,y)$.
- Seja $\ell_{i,j}$ a única reta em $\mathbb{P}^3$ passando pelos pontos p_i e q_j. Assim,

$$\ell_{i,j} : \begin{cases} a_i y - b_i x = 0, \\ a_j z - b_j t = 0. \end{cases} \Longrightarrow \ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi \ \forall\, i,j \overset{\mathrm{p}_i \in \ell_{i,j}}{\Longrightarrow} \ell_{i,j} \in \mathcal{L}_\phi \ \forall\, i,j.$$

Proposição 1: Considere as retas $\mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t)$, $\mathrm{M} = \mathcal{Z}(x,y)$ e ℓ em $\mathbb{P}^3$. Se $d \geq 2$ e $\ell \subset \mathcal{S}_\phi$, então verifica-se que

$$\ell \cap \mathrm{L} \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad \ell \cap \mathrm{M} \neq \varnothing$$

Corolário: $\mathcal{L}_\phi = \left\{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i,j \leq d\right\}$.

Portanto, $\#(\mathcal{L}_\phi) = d^2$.

https://youtube.com/playlist?list=PLvVCuKOPiO6h_Sbjg1t2XJcJ1Z0x5YGum (Aula 4 E. de Verão 2021 UFPB)

Cálculo de $\#(\mathcal{L}'_\phi)$, sendo $\phi(u,v) = \prod_{i=1}^{d}(a_i v - b_i u)$ com $d \geq 3$,

$$\mathcal{L}'_\phi := \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} = \varnothing \right\} \quad \text{e} \quad \mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t).$$

Preliminares sobre automorfismos de $\mathbb{P}^1$.

Cálculo de $\#(\mathcal{L}'_\phi)$, sendo $\phi(u,v) = \prod_{i=1}^{d}(a_i v - b_i u)$ com $d \geq 3$,

$$\mathcal{L}'_\phi := \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} = \varnothing \right\} \quad \text{e} \quad \mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t).$$

Preliminares sobre automorfismos de $\mathbb{P}^1$.

- Uma função $\mathbf{T} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ se, e somente se, existe

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \text{ tal que } \mathbf{T}([r:s]) = [\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s].$$

Cálculo de $\#(\mathcal{L}'_\phi)$, sendo $\phi(u,v) = \prod_{i=1}^{d}(a_i v - b_i u)$ com $d \geq 3$,

$$\mathcal{L}'_\phi := \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} = \varnothing \right\} \quad \text{e} \quad \mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t).$$

Preliminares sobre automorfismos de $\mathbb{P}^1$.

- Uma função $\mathbf{T} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ se, e somente se, existe

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \text{ tal que } \mathbf{T}([r:s]) = [\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s].$$

- $(\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1), \circ)$ é um grupo com a composta de funções.

Cálculo de $\#(\mathcal{L}'_\phi)$, sendo $\phi(u,v) = \prod_{i=1}^{d}(a_i v - b_i u)$ com $d \geq 3$,

$$\mathcal{L}'_\phi := \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} = \varnothing \right\} \quad \text{e} \quad \mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t).$$

Preliminares sobre automorfismos de $\mathbb{P}^1$.

- Uma função $\mathbf{T} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ se, e somente se, existe

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \text{ tal que } \mathbf{T}([r:s]) = [\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s].$$

- $(\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1), \circ)$ é um grupo com a composta de funções.
- Se $C \subseteq \mathbb{P}^1$, então

$$\Gamma_C = \left\{ \mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(C) = C \right\}$$

é um subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$.

Cálculo de $\#(\mathcal{L}'_\phi)$, sendo $\phi(u,v) = \prod_{i=1}^{d}(a_i v - b_i u)$ com $d \geq 3$,

$$\mathcal{L}'_\phi := \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} = \varnothing \right\} \quad \text{e} \quad \mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t).$$

Preliminares sobre automorfismos de $\mathbb{P}^1$.

- Uma função $\mathbf{T} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ se, e somente se, existe

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \text{ tal que } \mathbf{T}([r:s]) = [\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s].$$

- $(\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1), \circ)$ é um grupo com a composta de funções.
- Se $C \subseteq \mathbb{P}^1$, então

$$\Gamma_C = \left\{ \mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(C) = C \right\}$$

é um subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$. Além disso, se $\#(C) \geq 3$, então Γ_C é finito.

Cálculo de $\#(\mathcal{L}'_\phi)$, sendo $\phi(u,v) = \prod_{i=1}^{d}(a_i v - b_i u)$ com $d \geq 3$,

$$\mathcal{L}'_\phi := \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap \mathrm{L} = \varnothing \right\} \quad \text{e} \quad \mathrm{L} = \mathcal{Z}(z,t).$$

Preliminares sobre automorfismos de $\mathbb{P}^1$.

- Uma função $\mathbf{T} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ se, e somente se, existe

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \text{ tal que } \mathbf{T}([r:s]) = [\alpha r + \beta s : \gamma r + \delta s].$$

- $(\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1), \circ)$ é um grupo com a composta de funções.
- Se $C \subseteq \mathbb{P}^1$, então

$$\Gamma_C = \left\{ \mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(C) = C \right\}$$

é um subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$. Além disso, se $\#(C) \geq 3$, então Γ_C é finito.

Proposição 2: Se $C = \left\{ [a_1 : b_1], \ldots, [a_d : b_d] \right\}$, então $\#(\mathcal{L}'_\phi) = d|\Gamma_C|$.

Qual é o esquema para mostrar que $\#(\mathcal{L}'_\phi) = d|\Gamma_C|$?

sendo $\phi(u,v) = \prod_{i=1}^{d}(a_i v - b_i u)$ $(d \geq 3)$ e $C = \Big\{[a_1 : b_1], ..., [a_d : b_d]\Big\}$.

Qual é o esquema para mostrar que $\#(\mathcal{L}'_\phi) = d|\Gamma_C|$?

sendo $\phi(u,v) = \prod_{i=1}^{d}(a_i v - b_i u)$ $(d \geq 3)$ e $C = \Big\{[a_1 : b_1], ..., [a_d : b_d]\Big\}$.

Lema 1: Se $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$, então ℓ induz um automorfismo $\mathbf{T}_\ell \in \Gamma_C$.

Lema 2: Defina $\Omega : \mathcal{L}'_\phi \longrightarrow \Gamma_C$ por $\ell \longmapsto \mathbf{T}_\ell$. Então
(i) Ω é sobrejetora. (ii) $\#(\Omega^{-1}(\mathbf{T})) = d$ para todo $\mathbf{T} \in \Gamma_C$.

Comentários sobre o

Lema 1: Se $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$, então ℓ induz um automorfismo $\mathbf{T}_\ell \in \Gamma_C$.

Comentários sobre o

Lema 1: Se $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$, então ℓ induz um automorfismo $\mathbf{T}_\ell \in \Gamma_C$.

Lema 2: Defina $\Omega : \mathcal{L}'_\phi \longrightarrow \Gamma_C$ por $\ell \longmapsto \mathbf{T}_\ell$. Então
(i) Ω é sobrejetora. (ii) $\#(\Omega^{-1}(\mathbf{T})) = d$ para todo $\mathbf{T} \in \Gamma_C$.

Comentários sobre o

Lema 1: Se $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$, então ℓ induz um automorfismo $\mathbf{T}_\ell \in \Gamma_C$.

Lema 2: Defina $\Omega : \mathcal{L}'_\phi \longrightarrow \Gamma_C$ por $\ell \longmapsto \mathbf{T}_\ell$. Então
(i) Ω é sobrejetora. (ii) $\#(\Omega^{-1}(\mathbf{T})) = d$ para todo $\mathbf{T} \in \Gamma_C$.

`https://youtube.com/playlist?list=PLvVCuKOPiO6h_Sbjg1t2XJcJ1Z0x5YGum` (Aula 5 E. de Verão 2021 UFPB)

Resumo: Se $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x,y) - \phi(z,t)) \subset \mathbb{P}^3$ sendo

$$\phi(u,v) = \prod_{i=1}^{d}(a_i v - b_i u).$$

Tem-se que

$$n_\phi := \#\Big\{ \text{ retas contidas em } \mathcal{S}_\phi \Big\} = \#(\mathcal{L}_\phi) + \#(\mathcal{L}'_\phi).$$

Além disso, para $d \geq 3$ verifica-se que $\#(\mathcal{L}_\phi) = d^2$ e $\#(\mathcal{L}'_\phi) = d \cdot |\Gamma_C|$ sendo $\Gamma_C = \Big\{ \mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(C) = C \Big\}$ com $C = \Big\{ [a_i : b_i] \Big\}_{i=1}^{d}$.

Portanto,

$$n_\phi = d^2 + d \cdot |\Gamma_C|.$$

Exemplo: Considere $C \subset \mathbb{P}^1$ tal que $\#(C) = 3$.

Exemplo: Considere $C \subset \mathbb{P}^1$ tal que $\#(C) = 3$.

Neste caso, vamos utilizar o seguinte resultado

Se $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2$ e q_3 em $\mathbb{P}^1$ são tais que $\mathrm{p}_i \neq \mathrm{p}_j$ e $\mathrm{q}_i \neq \mathrm{q}_j$ para todo $i \neq j$, então existe um único $\mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$, tal que $\mathbf{T}(\mathrm{p}_i) = \mathrm{q}_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Exemplo: Considere $C \subset \mathbb{P}^1$ tal que $\#(C) = 3$.

Neste caso, vamos utilizar o seguinte resultado

> Se $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2$ e q_3 em $\mathbb{P}^1$ são tais que $\mathrm{p}_i \neq \mathrm{p}_j$ e $\mathrm{q}_i \neq \mathrm{q}_j$ para todo $i \neq j$, então existe um único $\mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$, tal que $\mathbf{T}(\mathrm{p}_i) = \mathrm{q}_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Assim, se $C = \left\{\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3\right\}$, então as seis escolhas a seguir, determinam os elementos de Γ_C.

$$\begin{array}{cccccc}
\mathrm{p}_1 \longmapsto \mathrm{p}_1 & \mathrm{p}_1 \longmapsto \mathrm{p}_1 & \mathrm{p}_1 \longmapsto \mathrm{p}_3 & \mathrm{p}_1 \longmapsto \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_1 \longmapsto \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_1 \longmapsto \mathrm{p}_3 \\
\mathrm{p}_2 \longmapsto \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_2 \longmapsto \mathrm{p}_3 & \mathrm{p}_2 \longmapsto \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_2 \longmapsto \mathrm{p}_1 & \mathrm{p}_2 \longmapsto \mathrm{p}_3 & \mathrm{p}_2 \longmapsto \mathrm{p}_1 \\
\mathrm{p}_3 \longmapsto \mathrm{p}_3 & \mathrm{p}_3 \longmapsto \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_3 \longmapsto \mathrm{p}_1 & \mathrm{p}_3 \longmapsto \mathrm{p}_3 & \mathrm{p}_3 \longmapsto \mathrm{p}_1 & \mathrm{p}_3 \longmapsto \mathrm{p}_2
\end{array}$$

Exemplo: Considere $C \subset \mathbb{P}^1$ tal que $\#(C) = 3$.

Neste caso, vamos utilizar o seguinte resultado

> Se $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2$ e q_3 em $\mathbb{P}^1$ são tais que $\mathrm{p}_i \neq \mathrm{p}_j$ e $\mathrm{q}_i \neq \mathrm{q}_j$ para todo $i \neq j$, então existe um único $\mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$, tal que $\mathbf{T}(\mathrm{p}_i) = \mathrm{q}_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Assim, se $C = \left\{\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3\right\}$, então as seis escolhas a seguir, determinam os elementos de Γ_C.

$$\begin{array}{cccccc}
\mathrm{p}_1 \longmapsto \mathrm{p}_1 & \mathrm{p}_1 \longmapsto \mathrm{p}_1 & \mathrm{p}_1 \longmapsto \mathrm{p}_3 & \mathrm{p}_1 \longmapsto \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_1 \longmapsto \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_1 \longmapsto \mathrm{p}_3 \\
\mathrm{p}_2 \longmapsto \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_2 \longmapsto \mathrm{p}_3 & \mathrm{p}_2 \longmapsto \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_2 \longmapsto \mathrm{p}_1 & \mathrm{p}_2 \longmapsto \mathrm{p}_3 & \mathrm{p}_2 \longmapsto \mathrm{p}_1 \\
\mathrm{p}_3 \longmapsto \mathrm{p}_3 & \mathrm{p}_3 \longmapsto \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_3 \longmapsto \mathrm{p}_1 & \mathrm{p}_3 \longmapsto \mathrm{p}_3 & \mathrm{p}_3 \longmapsto \mathrm{p}_1 & \mathrm{p}_3 \longmapsto \mathrm{p}_2
\end{array}$$

Portanto, $|\Gamma_C| = 6$. De fato, Γ_C é isomorfo ao grupo das permutações de 3 elementos.

Como determinar subconjuntos

$C \subset \mathbb{P}^1$ com $\#(C) = d \geq 4$

tais que

$|\Gamma_C|$ seja a máxima possível?

Teorema de Classificação de Klein - (TCK)
Um subgrupo finito de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ é isomorfo a exatamente um dos seguintes grupos

(i) C_m o grupo cíclico de ordem m;

(ii) D_m o grupo diedral de ordem $2m$, $m \geq 2$;

(iii) A_4 o grupo alternado de ordem 12;

(iv) S_4 o grupo das permutações de ordem 24;

(v) A_5 o grupo alternado de ordem 60.

Se dois subgrupos de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ são isomorfos, então eles são conjugados.

$+$ alguns outros resultados cuja demonstração tem como ponto chave a ação de grupos sobre conjuntos.

Exemplo: Considere $C \subset \mathbb{P}^1$ tal que $\#(C) = 4$.

Exemplo: Considere $C \subset \mathbb{P}^1$ tal que $\#(C) = 4$. O TCK nós garante que

$$\Gamma_C = \left\{ \mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(C) = C \right\}$$

é cíclico ou $\Gamma_C \cong G$ com $G \in \{D_m, A_4, S_4, A_5\}$ para algum $m \geq 2$.

Exemplo: Considere $C \subset \mathbb{P}^1$ tal que $\#(C) = 4$. O TCK nós garante que

$$\Gamma_C = \left\{ \mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(C) = C \right\}$$

é cíclico ou $\Gamma_C \cong G$ com $G \in \{D_m, A_4, S_4, A_5\}$ para algum $m \geq 2$.

Utilizando a seguinte proposição

Proposição 3: Se $C \subset \mathbb{P}^1$ contém d pontos distintos $(d \geq 3)$. Tem-se que

- Se $\Gamma_C \cong A_4$ então $d = 6 \cdot \alpha + 4 \cdot \beta + 4 \cdot \gamma + 12 \cdot \delta$
- Se $\Gamma_C \cong S_4$ então $d = 12 \cdot \alpha + 8 \cdot \beta + 6 \cdot \gamma + 24 \cdot \delta$
- Se $\Gamma_C \cong A_5$ então $d = 30 \cdot \alpha + 20 \cdot \beta + 12 \cdot \gamma + 60 \cdot \delta$

  para certos $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$ e $\delta \geq 0$ inteiro, respectivamente.

Exemplo: Considere $C \subset \mathbb{P}^1$ tal que $\#(C) = 4$. O TCK nós garante que

$$\Gamma_C = \left\{ \mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(C) = C \right\}$$

é cíclico ou $\Gamma_C \cong G$ com $G \in \{D_m, A_4, S_4, A_5\}$ para algum $m \geq 2$.

Utilizando a seguinte proposição

Proposição 3: Se $C \subset \mathbb{P}^1$ contém d pontos distintos $(d \geq 3)$. Tem-se que

- Se $\Gamma_C \cong A_4$ então $d = 6 \cdot \alpha + 4 \cdot \beta + 4 \cdot \gamma + 12 \cdot \delta$
- Se $\Gamma_C \cong S_4$ então $d = 12 \cdot \alpha + 8 \cdot \beta + 6 \cdot \gamma + 24 \cdot \delta$
- Se $\Gamma_C \cong A_5$ então $d = 30 \cdot \alpha + 20 \cdot \beta + 12 \cdot \gamma + 60 \cdot \delta$

  para certos $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$ e $\delta \geq 0$ inteiro, respectivamente.

concluíse que $\Gamma_C \ncong S_4$ e $\Gamma_C \ncong S_5$.

Com isso, se Γ_C não for cíclico segue que $\Gamma_C \cong A_4$ ou $\Gamma_C \cong D_m$.

Com isso, se Γ_C não for cíclico segue que $\Gamma_C \cong A_4$ ou $\Gamma_C \cong D_m$.

Agora, a proposiçao a seguir

Proposição 4: Se $C \subset \mathbb{P}^1$ contém d pontos distintos $(d \geq 3)$. Então

(i) Se Γ_C for cíclico então $|\Gamma_C| \leq d$.

(ii) Se $\Gamma_C \cong D_k$ o grupo diedral sendo $k \geq 2$, então $k \,|\, d$ ou $k \,|\, (d-2)$.

(iii) Se $C = \left\{[1 : \xi^j]\right\}_{j=1}^{d}$ sendo ξ uma raiz primitiva d-ésima da unidade, então $\Gamma_C \cong D_d$ o grupo diedral de ordem $2d$.

Com isso, se Γ_C não for cíclico segue que $\Gamma_C \cong A_4$ ou $\Gamma_C \cong D_m$.

Agora, a proposiçao a seguir

Proposição 4: Se $C \subset \mathbb{P}^1$ contém d pontos distintos $(d \geq 3)$. Então

(i) Se Γ_C for cíclico então $|\Gamma_C| \leq d$.

(ii) Se $\Gamma_C \cong D_k$ o grupo diedral sendo $k \geq 2$, então $k \,|\, d$ ou $k \,|\, (d-2)$.

(iii) Se $C = \left\{[1 : \xi^j]\right\}_{j=1}^{d}$ sendo ξ uma raiz primitiva d-ésima da unidade, então $\Gamma_C \cong D_d$ o grupo diedral de ordem $2d$.

nos garante que:

se $\Gamma_C \ncong A_4$, então $|\Gamma_C| \leq 8$.

Com isso, se Γ_C não for cíclico segue que $\Gamma_C \cong A_4$ ou $\Gamma_C \cong D_m$.

Agora, a proposiçao a seguir

Proposição 4: Se $C \subset \mathbb{P}^1$ contém d pontos distintos $(d \geq 3)$. Então

(i) Se Γ_C for cíclico então $|\Gamma_C| \leq d$.

(ii) Se $\Gamma_C \cong D_k$ o grupo diedral sendo $k \geq 2$, então $k \,|\, d$ ou $k \,|\, (d-2)$.

(iii) Se $C = \left\{[1 : \xi^j]\right\}_{j=1}^{d}$ sendo ξ uma raiz primitiva d-ésima da unidade, então $\Gamma_C \cong D_d$ o grupo diedral de ordem $2d$.

nos garante que:

se $\Gamma_C \ncong A_4$, então $|\Gamma_C| \leq 8$.

Para $d = 4$, segue que:

- Se Γ_C for cíclic,o então $|\Gamma_C| \leq 4$.
- Se $\Gamma_C \cong D_k$, então $k = 2$ ou $k = 4$.
- Se $C = \{[1 : i], [1 : -1], [1 : -i], [1 : 1]\}$, então $\Gamma_C \cong D_4$.

Portanto, $|\Gamma_C| \leq 8$ (se $\Gamma_C \ncong A_4$).

Existe $C \subset \mathbb{P}^1$ tal que $\#(C) = 4$ e $\Gamma_C \cong A_4$?

Existe $C \subset \mathbb{P}^1$ tal que $\#(C) = 4$ e $\Gamma_C \cong A_4$?

Sim!

Existe $C \subset \mathbb{P}^1$ tal que $\#(C) = 4$ e $\Gamma_C \cong A_4$?

Sim!

Tarefa: Considere $C = \{\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4\}$ com

$$\mathrm{p}_1 = [1:0],\ \mathrm{p}_2 = [1:1],\ \mathrm{p}_3 = [1:\xi] \ \text{ e } \ \mathrm{p}_4 = [1:\xi^2]$$

sendo ξ uma raiz cúbica da unidade (isto é, $1 \neq \xi \in \mathbb{C}$ tal que $\xi^3 = 1$). Mostre que $\Gamma_C \cong A_4$.

Dica: Verifique que

- $\mathbf{T} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ dado por $[r:s] \longmapsto [\xi r : s]$ é um elemento de ordem 3 de Γ_C.
- $\mathbf{S} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ dado por $[r:s] \longmapsto [r+2s : r-s]$ é um elemento de ordem 2 de Γ_C.

Como determinar subconjuntos

$C \subset \mathbb{P}^1$ com $\#(C) = d \geq 5$

tais que

$|\Gamma_C|$ seja a máxima possível?

Dois pontos chaves:

Se $C \subset \mathbb{P}^1$ contém d pontos distintos $(d \geq 3)$, então tem-se que

- Se $C = \left\{[1 : \xi^j]\right\}_{j=1}^{d}$ sendo ξ uma raiz primitiva d-ésima da unidade, então $\Gamma_C \cong D_d$ o grupo diedral de ordem $2d$.
- Se d é ímpar e Γ_C não é cíclico, então $\Gamma_C \cong D_k$ para algum k, $3 \leq k \leq d$.

Dois pontos chaves:

Se $C \subset \mathbb{P}^1$ contém d pontos distintos $(d \geq 3)$, então tem-se que

- Se $C = \left\{[1 : \xi^j]\right\}_{j=1}^{d}$ sendo ξ uma raiz primitiva d-ésima da unidade, então $\Gamma_C \cong D_d$ o grupo diedral de ordem $2d$.
- Se d é ímpar e Γ_C não é cíclico, então $\Gamma_C \cong D_k$ para algum k, $3 \leq k \leq d$.

$d \geq 30$
ou
$5 \leq d \leq 29$ e d ímpar.

$\Longrightarrow$

Basta escolher

$$C = \left\{[1 : \xi^m]\right\}_{m=1}^{d}$$

sendo ξ uma raiz primitiva d–ésima da unidade.

Dois pontos chaves:

Se $C \subset \mathbb{P}^1$ contém d pontos distintos $(d \geq 3)$, então tem-se que

- Se $C = \left\{[1 : \xi^j]\right\}_{j=1}^{d}$ sendo ξ uma raiz primitiva d-ésima da unidade, então $\Gamma_C \cong D_d$ o grupo diedral de ordem $2d$.
- Se d é ímpar e Γ_C não é cíclico, então $\Gamma_C \cong D_k$ para algum k, $3 \leq k \leq d$.

$d \geq 30$
ou
$5 \leq d \leq 29$ e d ímpar.

$\Longrightarrow$

Basta escolher

$$C = \left\{[1 : \xi^m]\right\}_{m=1}^{d}$$

sendo ξ uma raiz primitiva d–ésima da unidade.

Assim, $N_d = d^2 + d \cdot |\Gamma_C| = 3d^2$.

Se $6 \leq d \leq 28$ for par, então considere $\mathrm{X} = \{6, 8, 12, 20\}$. Usando um raciocínio análogo ao utilizado no caso $d = 4$, concluí-se que

Se $6 \leq d \leq 28$ for par, então considere $\mathrm{X} = \{6, 8, 12, 20\}$. Usando um raciocínio análogo ao utilizado no caso $d = 4$, concluí-se que

$\lvert C\rvert = d$	Valor máximo $\lvert\Gamma_C\rvert$	$N_d =$ Valor máximo de $n_\phi = d^2 + d \cdot \lvert\Gamma_C\rvert$
$d \notin \mathrm{X}$	$2 \cdot d$	$3 \cdot d^2$
6	24	180
8	24	256
12	60	864
20	60	1600

Se $6 \leq d \leq 28$ for par, então considere $\mathrm{X} = \{6, 8, 12, 20\}$. Usando um raciocínio análogo ao utilizado no caso $d = 4$, concluí-se que

$\lvert C\rvert = d$	Valor máximo $\lvert\Gamma_C\rvert$	$N_d =$ Valor máximo de $n_\phi = d^2 + d \cdot \lvert\Gamma_C\rvert$
$d \notin \mathrm{X}$	$2 \cdot d$	$3 \cdot d^2$
6	24	180
8	24	256
12	60	864
20	60	1600

Para saber mais detalhes da escolha de C (acima) confira a dissertação de mestrado de Sally Sobre o número máximo de retas em superfícies de grau d em $\mathbb{P}^3$ DM-UFPB (2016) `https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/9272`