Contando retas em superfícies no espaço projetivo

Jacqueline Rojas - UFPB

Sally Andria - UFF

Wállace Mangueira - UFPB

Julho 2023

Cúbicas vs Quárticas

Fato ou Fake - I

Toda cúbica não singular contém retas.

Cúbicas vs Quárticas

Fato ou Fake - I

Toda cúbica não singular contém retas. **FATO** ✓

Cúbicas vs Quárticas

Fato ou Fake - I

Toda cúbica não singular contém retas. FATO ✓

Fato ou Fake - II

Toda quártica não singular contém retas.

Cúbicas vs Quárticas

Fato ou Fake - I

Toda cúbica não singular contém retas. FATO ✓

Fato ou Fake - II

Toda quártica não singular contém retas. (?)

Considere S é superfície quártica determinada pelo polinômio

$$f(x, y, z, t) = t^4 + xy^3 + yz^3 + zx^3 \in \mathbb{C}[x, y, z, t],$$

ou seja, $S := \mathcal{Z}(f)$.

Considere S é superfície quártica determinada pelo polinômio

$$f(x, y, z, t) = t^4 + xy^3 + yz^3 + zx^3 \in \mathbb{C}[x, y, z, t],$$

ou seja, $S := \mathcal{Z}(f)$. Qual é o número de retas contidas em S?

Considere S é superfície quártica determinada pelo polinômio

$$f(x, y, z, t) = t^4 + xy^3 + yz^3 + zx^3 \in \mathbb{C}[x, y, z, t],$$

ou seja, $S := \mathcal{Z}(f)$. Qual é o número de retas contidas em S?

Dica:

Você pode usar o que aprendeu na Monitoria 01 - Maxima

Monitoria 01 - Maxima (Revisão)

Monitoria 01 - Maxima (Revisão)

Cada reta do espaço projetivo pertence a exatamente um dos seguintes estratos

Estrato 1: $x = 0, y = 0, z = u, t = v$;

Estrato 2: $x = 0, y = u, z = ua, t = v$;

Estrato 3: $x = 0, y = u, z = v, t = ua + bv$;

Estrato 4: $x = u, y = ua, z = ub, t = v$;

Estrato 5: $x = u, y = ua, z = v, t = ub + vc$;

Estrato 6: $x = u, y = v, z = ua + vc, t = ub + vd$.

Monitoria 01 - Maxima (Revisão)

Cada reta do espaço projetivo pertence a exatamente um dos seguintes estratos

Estrato 1: $x = 0, y = 0, z = u, t = v$;

Estrato 2: $x = 0, y = u, z = ua, t = v$;

Estrato 3: $x = 0, y = u, z = v, t = ua + bv$;

Estrato 4: $x = u, y = ua, z = ub, t = v$;

Estrato 5: $x = u, y = ua, z = v, t = ub + vc$;

Estrato 6: $x = u, y = v, z = ua + vc, t = ub + vd$.

Contamos a quantidade de retas em cada estrato que estão contidas na superfície.

Estrato 1

Maxima on line

Estrato 1

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
```

Estrato 1

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f1: subst([x=0,y=0,z=u,t=v],f);
```

Estrato 1

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f1: subst([x=0,y=0,z=u,t=v],f);
if f1=0 then E1:1 else E1:0;
```

Clic Clear

Estrato 1

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f1: subst([x=0,y=0,z=u,t=v],f);
if f1=0 then E1:1 else E1:0;
```

Clic Clear

⋮

(%i3) if f1=0 then E1:1 else E1:0;
(%o3) 0

Estrato 2

Maxima on line

Estrato 2

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
```

Estrato 2

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f2: subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f);
```

Estrato 2

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f2: subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f);
f21: diff(f2,u,4)/(4!);
```

Estrato 2

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f2: subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f);
f21: diff(f2,u,4)/(4!);
f22: diff(diff(f2,u,3),v)/(3!);
```

Estrato 2

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f2: subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f);
f21: diff(f2,u,4)/(4!);
f22: diff(diff(f2,u,3),v)/(3!);
f23: diff(diff(f2,u,2),v,2)/(4);
```

Estrato 2

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f2: subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f);
f21: diff(f2,u,4)/(4!);
f22: diff(diff(f2,u,3),v)/(3!);
f23: diff(diff(f2,u,2),v,2)/(4);
f24: diff(diff(f2,u),v,3)/(3!);
```

Estrato 2

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f2: subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f);
f21: diff(f2,u,4)/(4!);
f22: diff(diff(f2,u,3),v)/(3!);
f23: diff(diff(f2,u,2),v,2)/(4);
f24: diff(diff(f2,u),v,3)/(3!);
f25: diff(f2,v,4)/(4!);
```

Estrato 2

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f2: subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f);
f21: diff(f2,u,4)/(4!);
f22: diff(diff(f2,u,3),v)/(3!);
f23: diff(diff(f2,u,2),v,2)/(4);
f24: diff(diff(f2,u),v,3)/(3!);
f25: diff(f2,v,4)/(4!);
s2: solve([f21=0,f22=0,f23=0,f24=0,f25=0],[a]);
```

Estrato 2

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f2: subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f);
f21: diff(f2,u,4)/(4!);
f22: diff(diff(f2,u,3),v)/(3!);
f23: diff(diff(f2,u,2),v,2)/(4);
f24: diff(diff(f2,u),v,3)/(3!);
f25: diff(f2,v,4)/(4!);
s2: solve([f21=0,f22=0,f23=0,f24=0,f25=0],[a]);
ss2: setify(s2);
```

Estrato 2

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f2: subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f);
f21: diff(f2,u,4)/(4!);
f22: diff(diff(f2,u,3),v)/(3!);
f23: diff(diff(f2,u,2),v,2)/(4);
f24: diff(diff(f2,u),v,3)/(3!);
f25: diff(f2,v,4)/(4!);
s2: solve([f21=0,f22=0,f23=0,f24=0,f25=0],[a]);
ss2: setify(s2);
E2: cardinality(ss2);
```

Clic Clear

Estrato 2

Clic Clear

⋮

```
(%i10) s2: solve([f21=0,f22=0,f23=0,f24=0,f25=0],[a]);
(%o10) [ ]
(%i11) ss2: setify(s2);
(%o11) { }
(%i12) E2: cardinality(ss2);
(%o12) 0
```

Estrato 3

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
```

Estrato 3

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f3: subst([x=0,y=u,z=v,t=u*a+b*v],f);
```

Estrato 3

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f3: subst([x=0,y=u,z=v,t=u*a+b*v],f);
f31: diff(f3,u,4)/(4!);
f32: diff(diff(f3,u,3),v)/(3!);
f33: diff(diff(f3,u,2),v,2)/(4);
f34: diff(diff(f3,u),v,3)/(3!);
f35: diff(f3,v,4)/(4!);
```

Estrato 3

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f3: subst([x=0,y=u,z=v,t=u*a+b*v],f);
f31: diff(f3,u,4)/(4!);
f32: diff(diff(f3,u,3),v)/(3!);
f33: diff(diff(f3,u,2),v,2)/(4);
f34: diff(diff(f3,u),v,3)/(3!);
f35: diff(f3,v,4)/(4!);
s3: solve([f31=0,f32=0,f33=0,f34=0,f35=0],[a,b]);
```

Estrato 3

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f3: subst([x=0,y=u,z=v,t=u*a+b*v],f);
f31: diff(f3,u,4)/(4!);
f32: diff(diff(f3,u,3),v)/(3!);
f33: diff(diff(f3,u,2),v,2)/(4);
f34: diff(diff(f3,u),v,3)/(3!);
f35: diff(f3,v,4)/(4!);
s3: solve([f31=0,f32=0,f33=0,f34=0,f35=0],[a,b]);
ss3: setify(s3);
```

Estrato 3

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f3: subst([x=0,y=u,z=v,t=u*a+b*v],f);
f31: diff(f3,u,4)/(4!);
f32: diff(diff(f3,u,3),v)/(3!);
f33: diff(diff(f3,u,2),v,2)/(4);
f34: diff(diff(f3,u),v,3)/(3!);
f35: diff(f3,v,4)/(4!);
s3: solve([f31=0,f32=0,f33=0,f34=0,f35=0],[a,b]);
ss3: setify(s3);
E3: cardinality(ss3);
```

Clic Clear

Estrato 3

Clic Clear

⋮

```
(%i19) s3: solve([f31=0,f32=0,f33=0,f34=0,f35=0],[a,b]);
(%o19) [ ]
(%i20) ss3: setify(s3);
(%o20) { }
(%i21) E3: cardinality(ss3);
(%o21) 0
```

Estrato 4

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
```

Estrato 4

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f4: subst([x=u,y=u*a,z=u*b,t=v],f);
```

Estrato 4

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f4: subst([x=u,y=u*a,z=u*b,t=v],f);
f41: diff(f4,u,4)/(4!);
f42: diff(diff(f4,u,3),v)/(3!);
f43: diff(diff(f4,u,2),v,2)/(4);
f44: diff(diff(f4,u),v,3)/(3!);
f45: diff(f4,v,4)/(4!);
s4: solve([f41=0,f42=0,f43=0,f44=0,f45=0],[a,b]);
ss4: setify(s4);
E4: cardinality(ss4);
```

Clic Clear

Estrato 4

Clic Clear

⋮

```
(%i28) s4: solve([f41=0,f42=0,f43=0,f44=0,f45=0],[a,b]);
(%o28) [ ]
(%i29) ss4: setify(s4);
(%o29) { }
(%i30) E4: cardinality(ss4);
(%o30) 0
```

Estrato 5

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
```

Estrato 5

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f5: subst([x=u,y=u*a,z=v,t=u*b+v*c],f);
```

Estrato 5

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f5: subst([x=u,y=u*a,z=v,t=u*b+v*c],f);
f51: diff(f5,u,4)/(4!);
f52: diff(diff(f5,u,3),v)/(3!);
f53: diff(diff(f5,u,2),v,2)/(4);
f54: diff(diff(f5,u),v,3)/(3!);
f55: diff(f5,v,4)/(4!);
s5: solve([f51=0,f52=0,f53=0,f54=0,f55=0],[a,b,c]);
ss5: setify(s5);
E5: cardinality(ss5);
```

Clic Clear

Estrato 5

Clic Clear

⋮

```
(%i37) s5: solve([f51=0,f52=0,f53=0,f54=0,f55=0],[a,b,c]);
(%o37) [ ]
(%i38) ss5: setify(s5);
(%o38) { }
(%i39) E5: cardinality(ss5);
(%o39) 0
```

Estrato 6

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
```

Estrato 6

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f6: subst([x=u,y=v,z=u*a+v*c,t=u*b+v*d],f);
```

Estrato 6

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
f6: subst([x=u,y=v,z=u*a+v*c,t=u*b+v*d],f);
f61: diff(f6,u,4)/(4!);
f62: diff(diff(f6,u,3),v)/(3!);
f63: diff(diff(f6,u,2),v,2)/(4);
f64: diff(diff(f6,u),v,3)/(3!);
f65: diff(f6,v,4)/(4!);
s6: solve([f61=0,f62=0,f63=0,f64=0,f65=0],[a,b,c,d]);
ss6: setify(s6);
E6: cardinality(ss6);
```

Clic Clear

Estrato 6

Clic Clear

⋮

```
(%i46)s6:solve([f61=0,f62=0,f63=0,f64=0,f65=0],[a,b,c,d]);
(%o46) [ ]
(%i47) ss6: setify(s6);
(%o47) { }
(%i48) E6: cardinality(ss6);
(%o48) 0
```

Total

Maxima on line

```
f: t^4+x*y^3+y*z^3+z*x^3;
t: E1+E2+E3+E4+E5+E6;
```

Clic Clear

⋮

(%i49) t: E1+E2+E3+E4+E5+E6;
(%o49) 0

Cúbicas vs Quárticas

Fato ou Fake - II

Toda quártica não singular contém retas.

Cúbicas vs Quárticas

Fato ou Fake - II

Toda quártica não singular contém retas. **FAKE !**

Cúbicas vs Quárticas

Fato ou Fake - II

Toda quártica não singular contém retas. **FAKE !**

A superfície quártica determinada por

$$f(x, y, z, t) = t^4 + xy^3 + yz^3 + zx^3 \in \mathbb{C}[x, y, z, t]$$

é não singular (por quê?) e não contém retas.

Cúbicas vs Quárticas

Fato ou Fake - III

Toda cúbica não singular contém exatamente 27 retas.

Cúbicas vs Quárticas

Fato ou Fake - III

Toda cúbica não singular contém exatamente 27 retas. **FATO** ✓

Cúbicas vs Quárticas

Fato ou Fake - III

Toda cúbica não singular contém exatamente 27 retas. **FATO** ✓

Fato ou Fake - IV

Dentre as quárticas não singulares que contém retas, todas contêm a mesma quantidade de retas.

Cúbicas vs Quárticas

Fato ou Fake - III

Toda cúbica não singular contém exatamente 27 retas. **FATO** ✓

Fato ou Fake - IV

Dentre as quárticas não singulares que contém retas, todas contêm a mesma quantidade de retas. (?)

Total

Maxima on line

```
f: z^4+y^4+x^3*y+t^4;
t: E1+E2+E3+E4+E5+E6;
```

Clic Clear

⋮

(%i49) t: E1+E2+E3+E4+E5+E6;
(%o49) 16

Total

Maxima on line

```
f: x^4+x^2*y^2+y^4+z^4+t^2*z^2+t^4;
t: E1+E2+E3+E4+E5+E6;
```

Clic Clear

⋮

(%i49) t: E1+E2+E3+E4+E5+E6;
(%o49) 32

Total

Maxima on line

```
f: x^4+y^4+z^4+t^4 /*Quártica de Fermat*/;
t: E1+E2+E3+E4+E5+E6;
```

Clic Clear

⋮

(%i49) t: E1+E2+E3+E4+E5+E6;
(%o49) 48

Total

Maxima on line*

```
f: x^4-x*y^3+z*t^3-z^4 /*Quártica de Schur*/;
t: E1+E2+E3+E4+E5+E6;
```

Clic Clear

⋮

(%i49) t: E1+E2+E3+E4+E5+E6;
(%o49) 64

Cúbicas vs Quárticas

Fato ou Fake - IV

Dentre as quárticas não singulares que contém retas, todas contêm a mesma quantidade de retas.

Cúbicas vs Quárticas

Fato ou Fake - IV

Dentre as quárticas não singulares que contém retas, todas contêm a mesma quantidade de retas. **FAKE !**

Cúbicas vs Quárticas

Fato ou Fake - IV

Dentre as quárticas não singulares que contém retas, todas contêm a mesma quantidade de retas. **FAKE !**

Fato ou Fake - V

O maior número de retas que uma superfície quártica não singular pode conter é 64.

Cúbicas vs Quárticas

Fato ou Fake - IV

Dentre as quárticas não singulares que contém retas, todas contêm a mesma quantidade de retas. **FAKE !**

Fato ou Fake - V

O maior número de retas que uma superfície quártica não singular pode conter é 64. (?)

Beniamino Segre

(1903 – 1977)

THE MAXIMUM NUMBER OF LINES LYING ON A QUARTIC SURFACE

By B. SEGRE (*Manchester*)

[Received 6 August 1943]

1. THE general algebraic surface of order n contains no lines, if $n \geqslant 4$. But obviously there are special non-singular, and therefore non-ruled, surfaces of any given order $n \geqslant 4$, which contain some lines. The question of determining the maximum number of lines possessed by such surfaces has been often indicated,* but never solved. In this paper I shall establish that:

The maximum number of lines lying on a non-singular quartic surface is 64.

Since a quartic surface with 64 lines has long ago been discovered by F. Schur,† I need only to show that no more than 64 lines can lie on any non-singular quartic surface. I succeed in proving this in § 9, by the use of certain general properties on surfaces containing lines (§§ 2–8).‡ Some of these properties concern quartic surfaces only. Others are established for surfaces of arbitrary order, and lead to an upper limit (if not to the maximum) for the number of lines lying on a non-singular surface of order $n > 4$ (§ 4).

point of intersection of G and C. Hence C is a line of the second kind on F, and so (10) *represents the most general non-singular quartic surface containing a line of the second kind.*

7. We can now prove the following theorem:

If a non-singular quartic surface F contains a line C, then F may contain at most 18 lines incident with C.

This is included in the final result of § 2, if C is a line of the first

94 B. SEGRE

point of intersection of G and C. Hence C is a line of the second kind on F, and so (10) *represents the most general non-singular quartic surface containing a line of the second kind.*

7. We can now prove the following theorem:

If a non-singular quartic surface F contains a line C, then F may contain at most 18 lines incident with C.

This is included in the final result of § 2, if C is a line of the first

FAKE !

Sławomir Rams

Mathias Schütt

Math. Ann. (2015) 362:679–698
DOI 10.1007/s00208-014-1139-y

Mathematische Annalen

CrossMark

64 lines on smooth quartic surfaces

Sławomir Rams · Matthias Schütt

Received: 11 September 2013 / Revised: 13 January 2014 / Published online: 2 December 2014

Abstract Let k be a field of characteristic $p \geq 0$ with $p \neq 2, 3$. We prove that there are no geometrically smooth quartic surfaces $S \subset \mathbb{P}^3_k$ with more than 64 lines. As a key step, we derive the sharp bound that any line meets at most 20 other lines on S.

Sławomir Rams

Mathias Schütt

6.4 Proof of the main result

Theorem 1.2 follows from the combination of Proposition 6.1 and Lemma 5.5 (a). □

Example 6.9 The subfamily of $\mathcal{Z}$ of quartics such that π_0 has a fibre of Kodaira type I_2 does in fact admit surfaces with as many lines as 60. For instance, consider the quartic defined by

$$S = \left\{ x_1^3 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_2^3 x_4 + r x_3^3 x_4 - x_1 x_2 x_4^2 - r x_3 x_4^3 = 0 \right\} \subset \mathbb{P}^3$$

with $r = -16/27$. Then this is smooth outside characteristics 2, 3, 5 and contains 60 lines, 20 of which meet the line of the second kind given by $\{x_3 = x_4 = 0\}$. Over $\mathbb{C}$, we obtain a singular K3 surface with Picard number $\rho = 20$ and discriminant -15 or -60.

Remark 6.10 Most arguments in this section remain valid in characteristic $p = 2$ as well. This is due to their geometric nature, since there are no degenerations. To see this, note first that the flecnodal divisor is non-degenerate since it does not contain the conic Q. Furthermore, the fibrations π_0, π_1 cannot be quasi-elliptic since π_0 contains fibres of Kodaira type I_2, I_3, IV not occurring on quasi-elliptic fibrations in characteristic 2, and π_1 has the smooth fibre E_0 at one of the fixed points of σ on ℓ_1.

Cúbica vs Quártica

Fato ou Fake - V

O maior número de retas que uma superfície quártica não singular pode conter é 64.

Cúbica vs Quártica

Fato ou Fake - V

O maior número de retas que uma superfície quártica não singular pode conter é 64. **FATO** ✓

Fim!

Obrigado!