# Contando retas em superfícies no espaço projetivo

Jacqueline Rojas - UFPB

Sally Andria - UFF

Wállace Mangueira - UFPB

Julho 2023

# Aula 02, Terça-feira 25/07/2023

Da última vez

- 
- 
- 

# Contagem de retas em superfícies cúbicas não singulares

Vamos começar contando as retas contidas na superfície cúbica de Fermat $\mathcal{F}_3 := \mathcal{Z}(f) \subset \mathbb{P}^3$ sendo

$$f := x^3 + y^3 + z^3 + t^3.$$

Nossa estratégia.

Vamos começar contando as retas contidas na superfície cúbica de Fermat $\mathcal{F}_3 := \mathcal{Z}(f) \subset \mathbb{P}^3$ sendo

$$f := x^3 + y^3 + z^3 + t^3.$$

Nossa estratégia.

- Polinômios homogêneos em duas variáveis fatoram-se em produto de lineares.

Vamos começar contando as retas contidas na superfície cúbica de Fermat $\mathcal{F}_3 := \mathcal{Z}(f) \subset \mathbb{P}^3$ sendo

$$f := x^3 + y^3 + z^3 + t^3.$$

Nossa estratégia.

- Polinômios homogêneos em duas variáveis fatoram-se em produto de lineares.
- De fato,

$$u^3 + v^3 = (u+v)(u^2 - uv + v^2) = (u+v)(u+\xi v)(u+\xi^2 v)$$

Vamos começar contando as retas contidas na superfície cúbica de Fermat $\mathcal{F}_3 := \mathcal{Z}(f) \subset \mathbb{P}^3$ sendo

$$f := x^3 + y^3 + z^3 + t^3.$$

Nossa estratégia.

- Polinômios homogêneos em duas variáveis fatoram-se em produto de lineares.
- De fato,

$$u^3 + v^3 = (u+v)(u^2 - uv + v^2) = (u+v)(u+\xi v)(u+\xi^2 v)$$

com $\xi \in \mathbb{C}$ tal que $\xi^2 + \xi + 1 = 0$.

Vamos começar contando as retas contidas na superfície cúbica de Fermat $\mathcal{F}_3 := \mathcal{Z}(f) \subset \mathbb{P}^3$ sendo

$$f := x^3 + y^3 + z^3 + t^3.$$

Nossa estratégia.

- Polinômios homogêneos em duas variáveis fatoram-se em produto de lineares.
- De fato,

$$u^3 + v^3 = (u+v)(u^2 - uv + v^2) = (u+v)(u+\xi v)(u+\xi^2 v)$$

  com $\xi \in \mathbb{C}$ tal que $\xi^2 + \xi + 1 = 0$.
- Visto que temos três escolhas para separação dos pares de variáveis no conjunto $\{x, y, z, t\}$, então

$$f = x^3 + y^3 + z^3 + t^3 \tag{1}$$

$$f = x^3 + z^3 + y^3 + t^3 \tag{2}$$

$$f = x^3 + t^3 + y^3 + z^3 \tag{3}$$

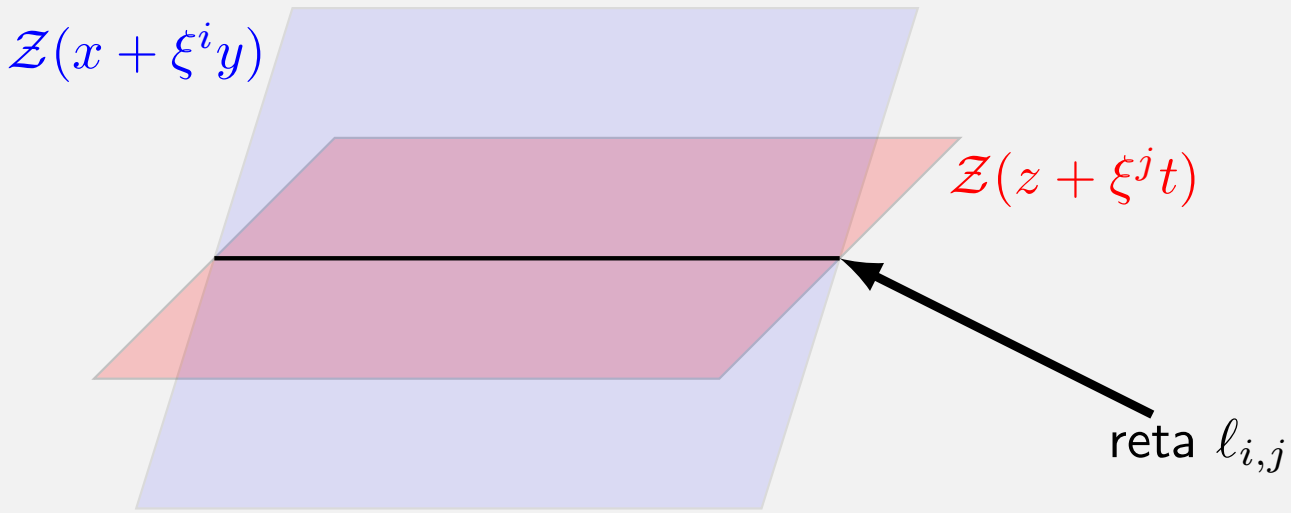
Por exemplo, no caso $(1)$ temos que

$$f = x^3 + y^3 + z^3 + t^3$$
$$f = (x+y)(x+\xi y)(x+\xi^2 y) + (z+t)(z+\xi t)(z+\xi^2 t)$$

Por exemplo, no caso $(1)$ temos que

$$f = x^3 + y^3 + z^3 + t^3$$
$$f = (x+y)(x+\xi y)(x+\xi^2 y) + (z+t)(z+\xi t)(z+\xi^2 t)$$

Assim, a superfície cúbica de Fermat contem as retas

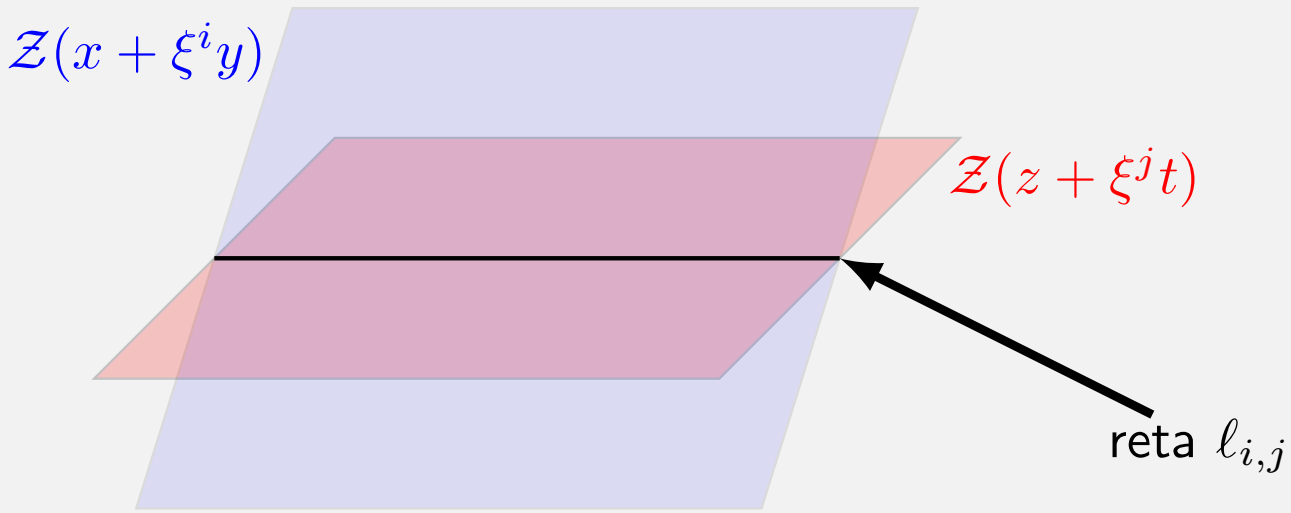



com $i, j \in \{0, 1, 2\}$. O que nos dá um total de 9 retas no caso $(1)$.

Por exemplo, no caso $(1)$ temos que

$$f = x^3 + y^3 + z^3 + t^3$$
$$f = (x+y)(x+\xi y)(x+\xi^2 y) + (z+t)(z+\xi t)(z+\xi^2 t)$$

Assim, a superfície cúbica de Fermat contem as retas




com $i, j \in \{0, 1, 2\}$. O que nos dá um total de 9 retas no caso $(1)$. De forma análoga a partir dos casos $(2)$ e $(3)$, obtemos mais 9+9 =18 retas.

# A pergunta que não quer calar!

# Como verificar que

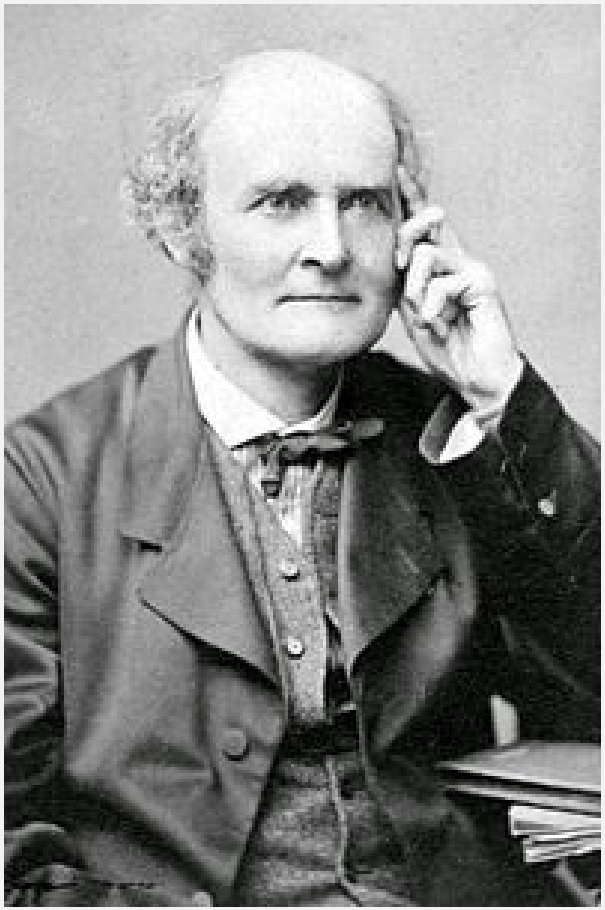
# $\mathcal{F}_3$ só contém aquelas 27 retas?

# A pergunta que não quer calar! Como verificar que $\mathcal{F}_3$ só contém aquelas 27 retas?

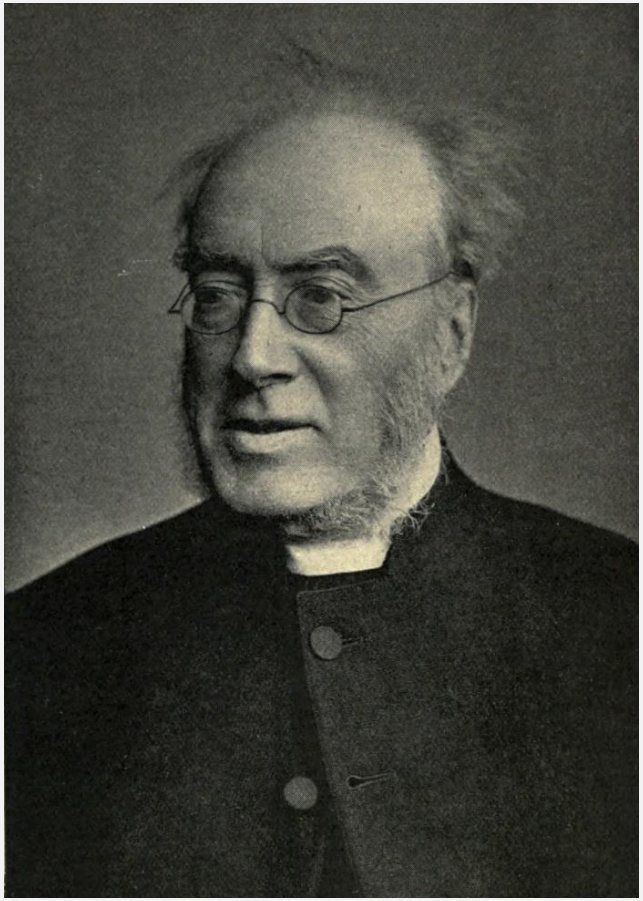
Vai na aula de monitoria hoje as 16:15 horas.

Wállace Mangueira DM-UFPB

# De fato, a frutífera correspondência trocada em 1849



**Arthur Cayley**
(1821-1895)



**George Salmon**
(1819-1904)

**Teorema**: Toda superfície cúbica não singular em $\mathbb{P}^3$ contém 27 retas.

Vamos começar por entender que.

**Toda superfície cúbica contém pelo menos uma reta.**

Vamos começar por entender que.

**Toda superfície cúbica contém pelo menos uma reta.**

Seja $S_3$ o subespaço de $\mathbb{C}[x, y, z, t]$ gerado pelos monômios de grau 3.

Vamos começar por entender que.

**Toda superfície cúbica contém pelo menos uma reta.**

Seja $S_3$ o subespaço de $\mathbb{C}[x, y, z, t]$ gerado pelos monômios de grau 3.

- Sabemos que cada $f \in S_3$ não nulo determina a superficie

$$\mathcal{Z}(f) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{P}^3 \mid f(\mathrm{p}) = 0\}.$$

Vamos começar por entender que.

**Toda superfície cúbica contém pelo menos uma reta.**

Seja $S_3$ o subespaço de $\mathbb{C}[x, y, z, t]$ gerado pelos monômios de grau 3.

- Sabemos que cada $f \in S_3$ não nulo determina a superficie

$$\mathcal{Z}(f) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{P}^3 \mid f(\mathrm{p}) = 0\}.$$

- Se $0 \neq f \in S_3$ e $g = \lambda f$ com $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo, então $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$.

Vamos começar por entender que.

**Toda superfície cúbica contém pelo menos uma reta.**

Seja $S_3$ o subespaço de $\mathbb{C}[x, y, z, t]$ gerado pelos monômios de grau 3.

- Sabemos que cada $f \in S_3$ não nulo determina a superficie

$$\mathcal{Z}(f) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{P}^3 \mid f(\mathrm{p}) = 0\}.$$

- Se $0 \neq f \in S_3$ e $g = \lambda f$ com $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo, então $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$.
- Ao considerarmos $f, g \in S_3$ não nulos, tem-se que

$$f \sim g \Longleftrightarrow g = \lambda f \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{C} \text{ não nulo}$$

define uma relação de equivalência em $S_3 - \{0\}$,

Vamos começar por entender que.

**Toda superfície cúbica contém pelo menos uma reta.**

Seja $S_3$ o subespaço de $\mathbb{C}[x, y, z, t]$ gerado pelos monômios de grau 3.

- Sabemos que cada $f \in S_3$ não nulo determina a superficie

$$\mathcal{Z}(f) = \{\mathrm{p} \in \mathbb{P}^3 \mid f(\mathrm{p}) = 0\}.$$

- Se $0 \neq f \in S_3$ e $g = \lambda f$ com $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo, então $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$.
- Ao considerarmos $f, g \in S_3$ não nulos, tem-se que

$$f \sim g \Longleftrightarrow g = \lambda f \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{C} \text{ não nulo}$$

define uma relação de equivalência em $S_3 - \{0\}$, cujo conjunto quociente será denotado por $\mathbb{P}(S_3)$, e seus elementos por $\overline{f}$ para cada $f \in S_3 - \{0\}$.

Sejam $\Sigma := \left\{ \text{ retas em } \mathbb{P}^3 \right\}$ e $\Gamma := \left\{ (\overline{f}, \ell) \mid \ell \subset \mathcal{Z}(f) \right\} \subset \mathbb{P}(S_3) \times \Sigma$.

Sejam $\Sigma := \left\{ \text{ retas em } \mathbb{P}^3 \right\}$ e $\Gamma := \left\{ (\overline{f}, \ell) \mid \ell \subset \mathcal{Z}(f) \right\} \subset \mathbb{P}(S_3) \times \Sigma$.

Considere

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}(S_3) \\ (\overline{f}, \ell) & \longmapsto & \overline{f} \end{array}$$

a projeção na primeira coordenada.

Sejam $\Sigma := \left\{ \text{ retas em } \mathbb{P}^3 \right\}$ e $\Gamma := \left\{ (\overline{f}, \ell) \mid \ell \subset \mathcal{Z}(f) \right\} \subset \mathbb{P}(S_3) \times \Sigma$.

Considere

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}(S_3) \\ (\overline{f}, \ell) & \longmapsto & \overline{f} \end{array}$$

a projeção na primeira coordenada.

Observe que

$p$ é sobrejetora $\iff$ toda superfície $\mathcal{Z}(f)$ (com $f \in S_3$ não nulo) contém pelo menos uma reta.

A seguir, seja $\ell$ uma reta contida numa superfície cúbica não singular $\mathrm{X}$.

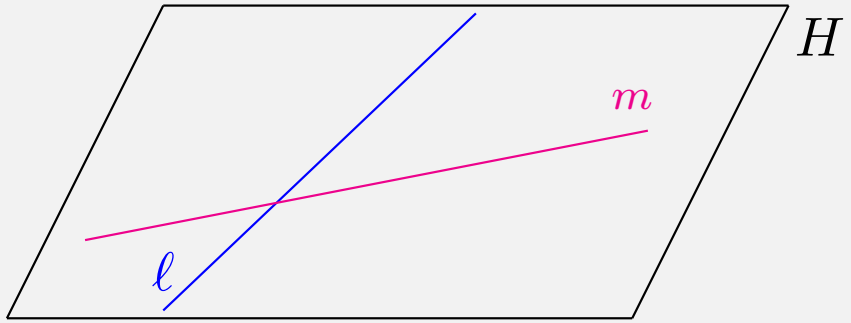
A seguir, seja $\ell$ uma reta contida numa superfície cúbica não singular $\mathrm{X}$.

O próximo passo é achar todas as retas contidas em $\mathrm{X}$ que encontram a reta $\ell$.

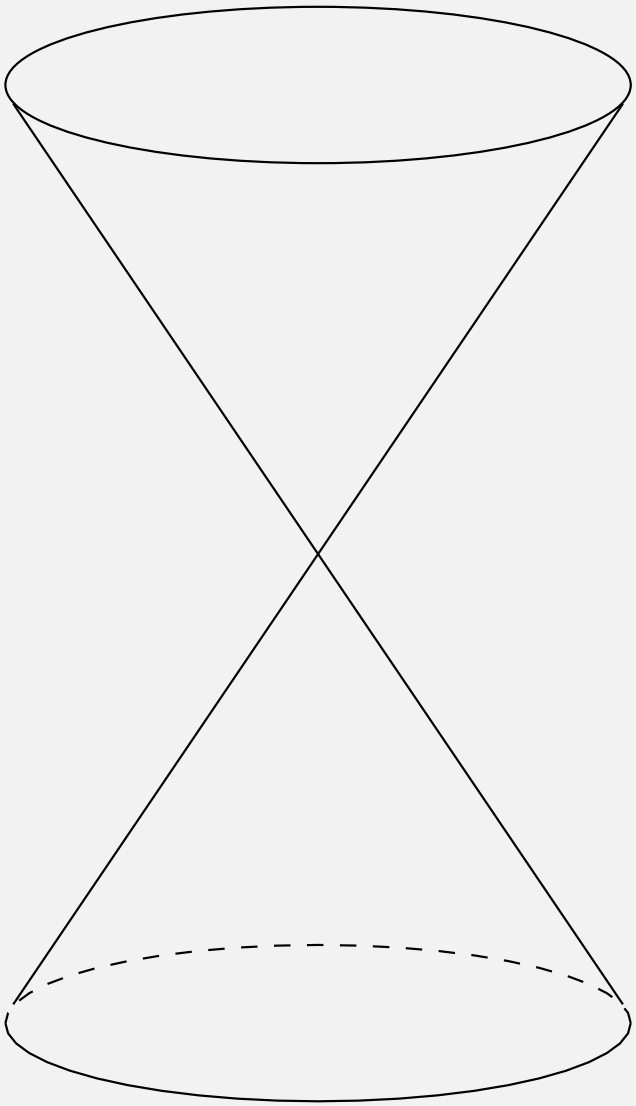
A seguir, seja $\ell$ uma reta contida numa superfície cúbica não singular $\mathrm{X}$.

O próximo passo é achar todas as retas contidas em $\mathrm{X}$ que encontram a reta $\ell$.

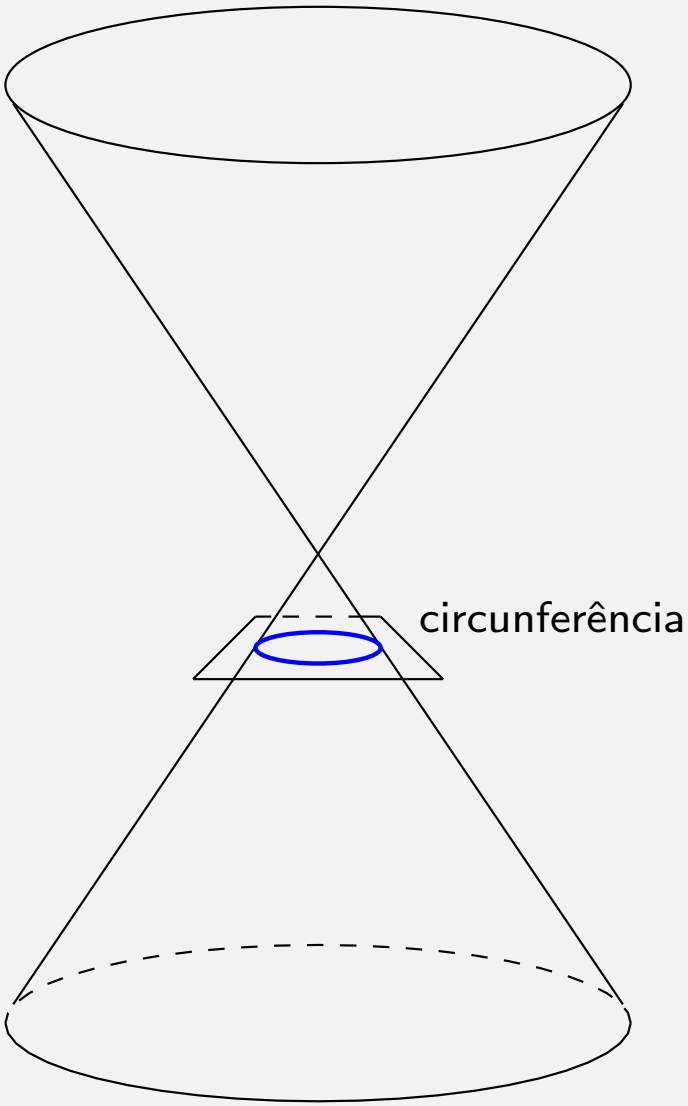
A chave: se $m \subset \mathrm{X}$ é uma reta distinta de $\ell$ tal que $m \cap \ell \neq \emptyset$, então existe um único plano $H$ contento $m$ e $\ell$.



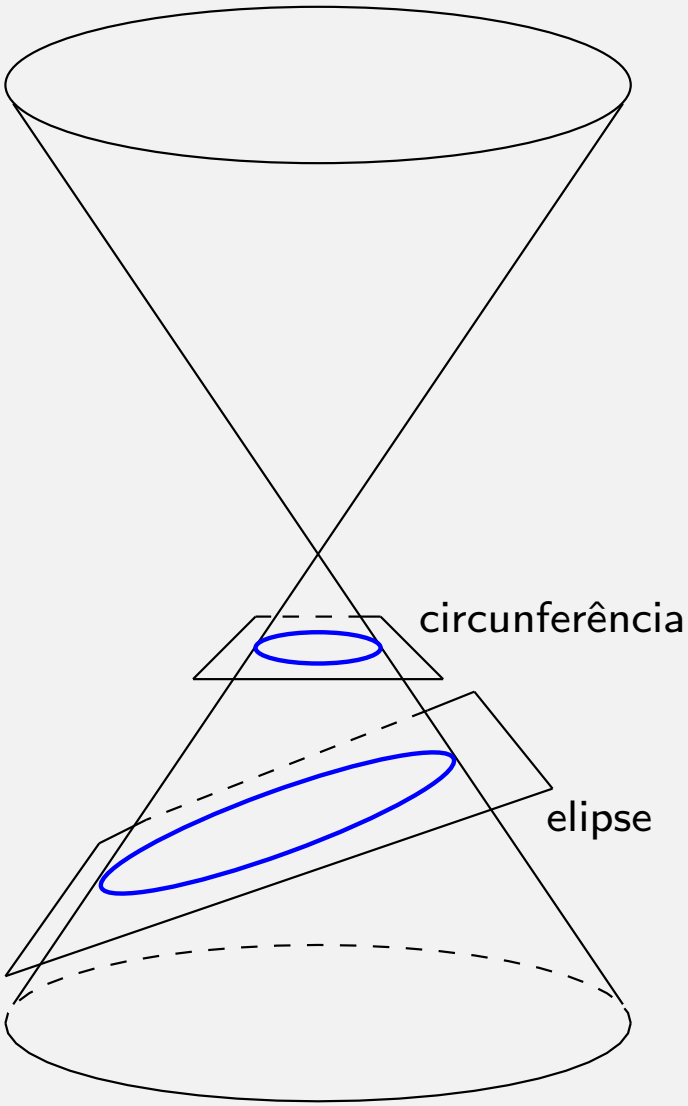
Por exemplo, ao considerar o cone (em $\mathbb{R}^3$ definido por $x^2 + y^2 - z^2 = 0$)



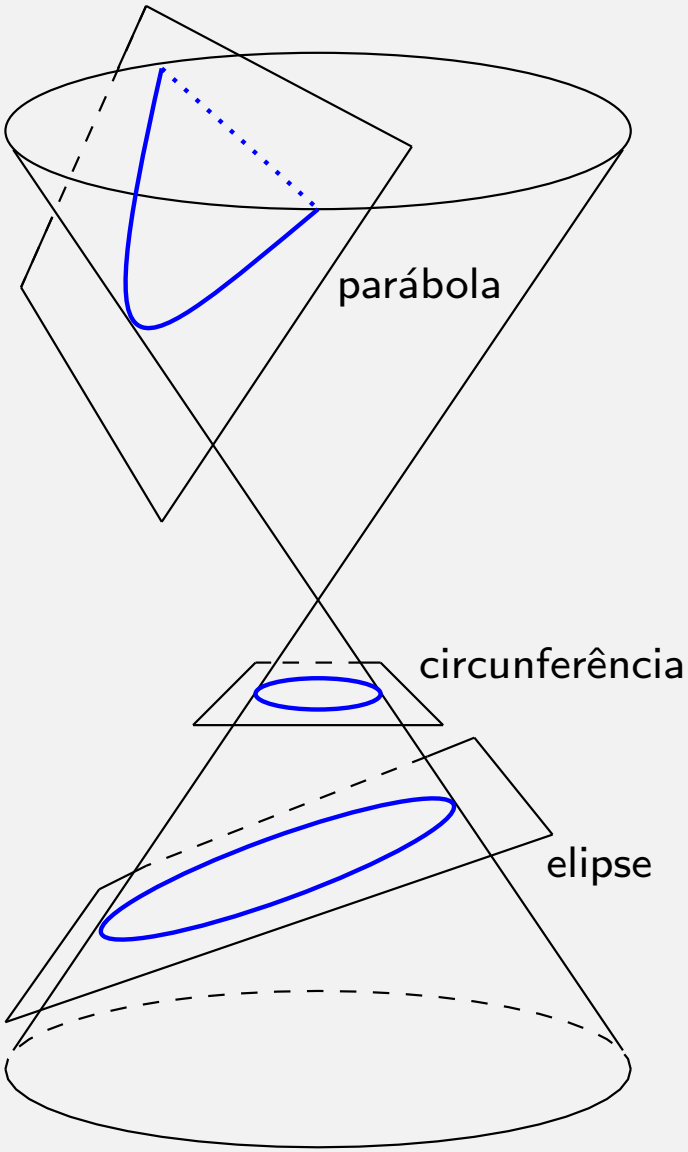
Por exemplo, ao considerar o cone (em $\mathbb{R}^3$ definido por $x^2 + y^2 - z^2 = 0$)



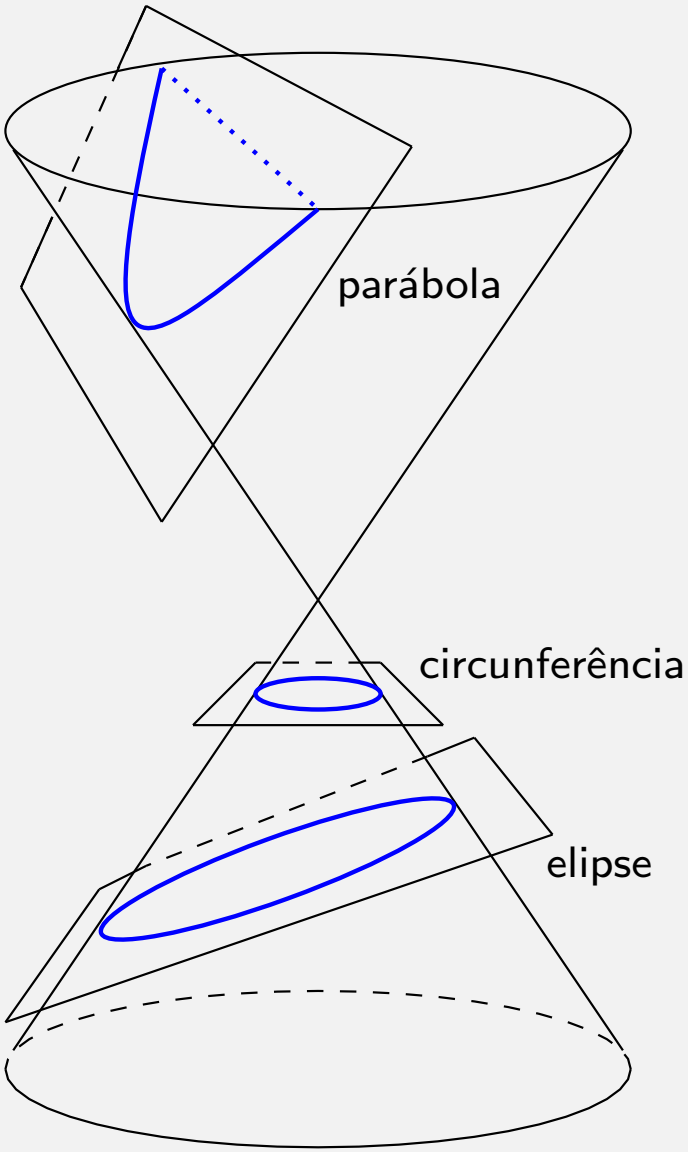
Por exemplo, ao considerar o cone (em $\mathbb{R}^3$ definido por $x^2 + y^2 - z^2 = 0$)

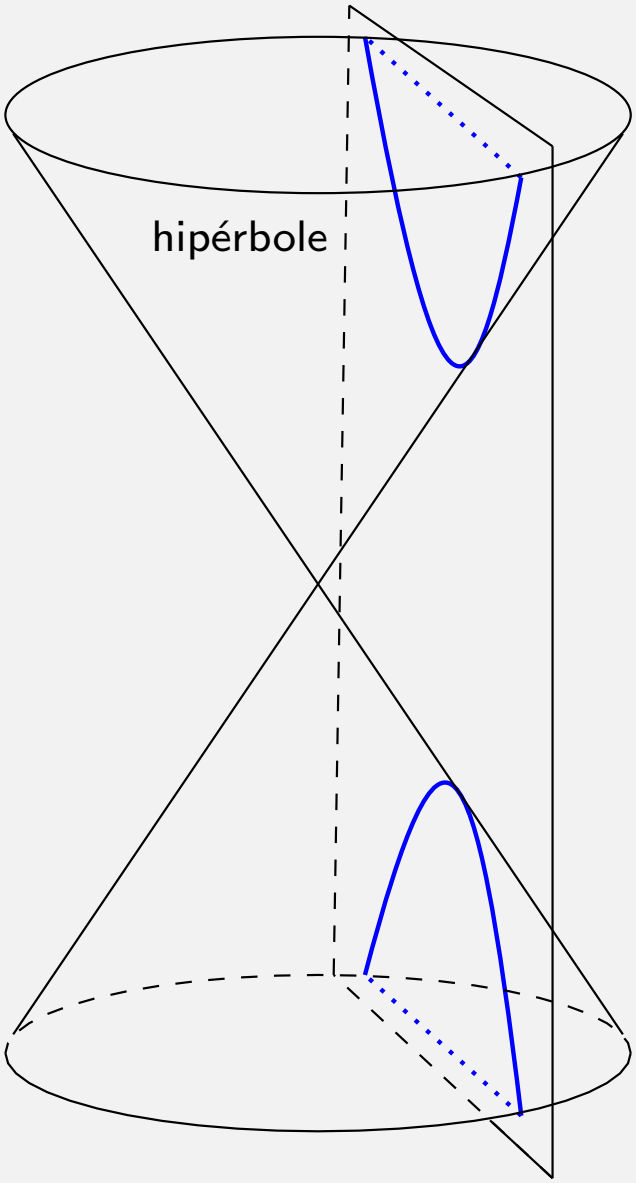


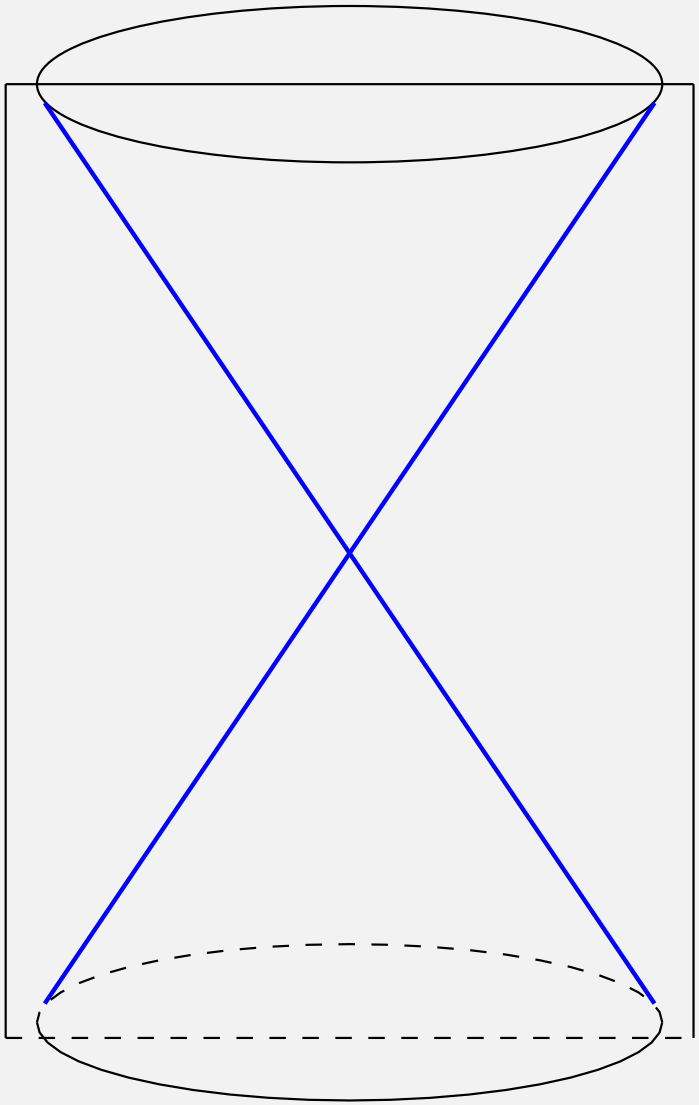
Por exemplo, ao considerar o cone (em $\mathbb{R}^3$ definido por $x^2 + y^2 - z^2 = 0$)



Por exemplo, ao considerar o cone (em $\mathbb{R}^3$ definido por $x^2 + y^2 - z^2 = 0$)





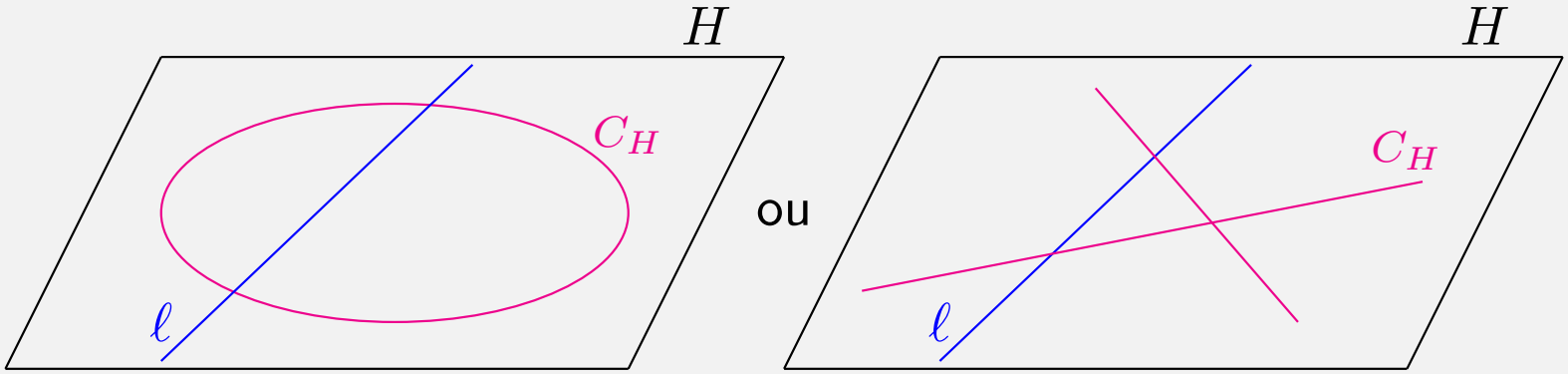
par de retas concorrentes

No caso da superfície cúbica não singular $\mathrm{X}$ contendo a reta $\ell$, verificamos que

$$H \cap \mathrm{X} = \ell \cup C_H \quad \text{sendo } C_H \text{ uma cônica no plano } H.$$

No caso da superfície cúbica não singular $\mathrm{X}$ contendo a reta $\ell$, verificamos que

$$H \cap \mathrm{X} = \ell \cup C_H \quad \text{sendo } C_H \text{ uma cônica no plano } H.$$



**Proposição**: Se $\ell$ é uma reta contida na superfície cúbica não singular $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$, então existem exatamente 5 planos contendo a reta $\ell$, digamos $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ e $H_5$, tais que

$$H_i \cap \mathrm{X} = \ell \cup C_i$$

sendo $C_i = \ell_i \cup \ell_i'$ com $\ell_i$ e $\ell_i'$ retas distintas para cada $i \in \{1, \ldots, 5\}$.

**Proposição**: Se $\ell$ é uma reta contida na superfície cúbica não singular $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$, então existem exatamente 5 planos contendo a reta $\ell$, digamos $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ e $H_5$, tais que

$$H_i \cap \mathrm{X} = \ell \cup C_i$$

sendo $C_i = \ell_i \cup \ell_i'$ com $\ell_i$ e $\ell_i'$ retas distintas para cada $i \in \{1, \ldots, 5\}$.

---

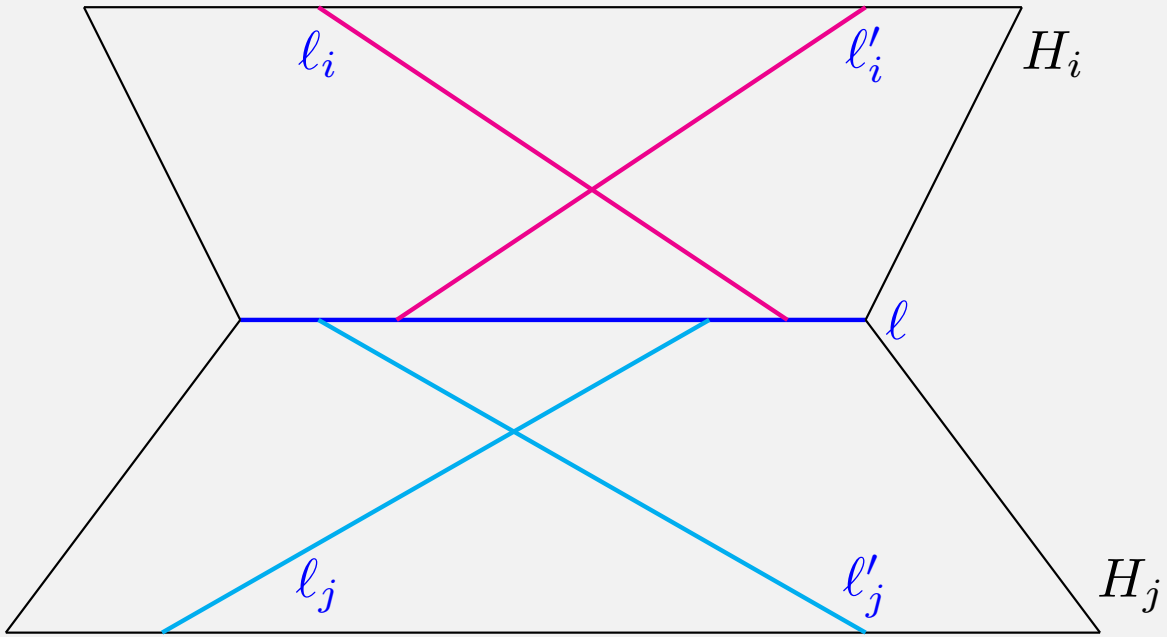
Corresponde ao Teorema 3.3 do livro (cuja demonstração segue as linhas do Capítulo 7 do livro de Miles Anthony Reid, Undergraduate algebraic geometry. Vol. 12. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, pp. viii+129 (1988)).

Além disso, verifica-se para $i \neq j$ que:

$$\ell_i \cap \ell_j = \emptyset,$$

$$\ell'_i \cap \ell'_j = \emptyset,$$

$$\ell_i \cap \ell'_j = \emptyset.$$

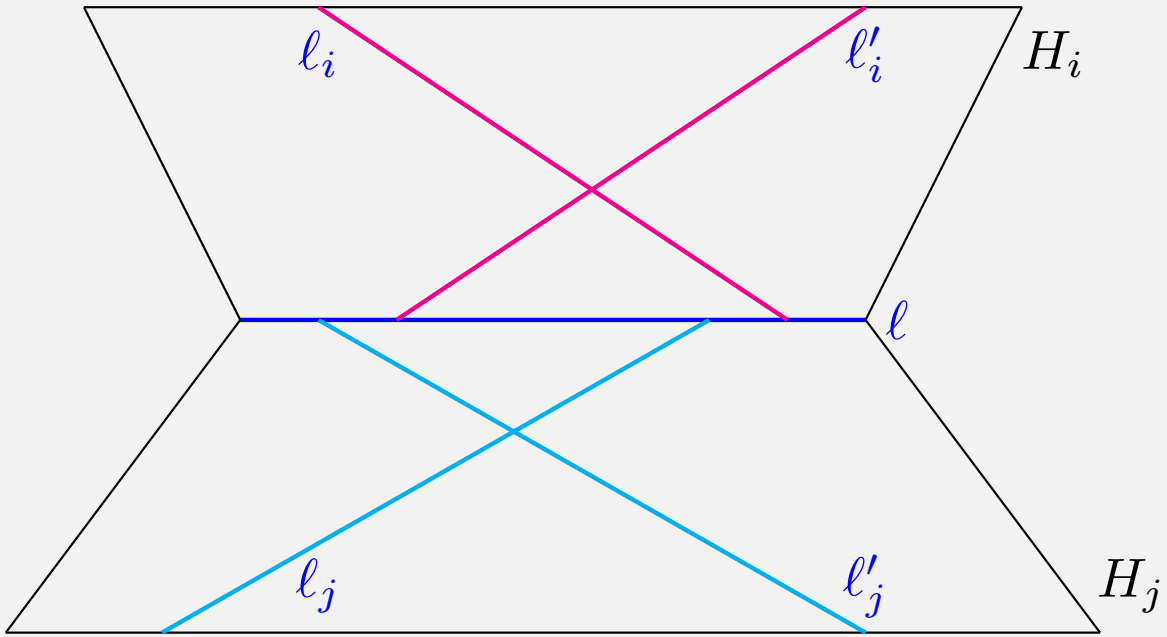


Além disso, verifica-se para $i \neq j$ que:

$$\ell_i \cap \ell_j = \emptyset,$$

$$\ell'_i \cap \ell'_j = \emptyset,$$

$$\ell_i \cap \ell'_j = \emptyset.$$




**Corolário:** As retas $\ell_1, \ldots, \ell_5, \ell'_1, \ldots, \ell'_5$ são as únicas retas contidas na superfície cúbica não singular $\mathrm{X}$ que encontram $\ell$.

Assim, fixada a reta $\ell$ na superfície cúbica não singular $\mathrm{X}$, obtemos as 11 retas

$$\ell, \ell_1, \ldots, \ell_5, \ell'_1, \ldots, \ell'_5.$$

Assim, fixada a reta $\ell$ na superfície cúbica não singular $\mathrm{X}$, obtemos as 11 retas

$$\ell, \ell_1, \ldots, \ell_5, \ell'_1, \ldots, \ell'_5.$$

Vamos a procura de mais retas!

Assim, fixada a reta $\ell$ na superfície cúbica não singular $\mathrm{X}$, obtemos as 11 retas

$$\ell, \ell_1, \ldots, \ell_5, \ell'_1, \ldots, \ell'_5.$$

Vamos a procura de mais retas!

Observe que:

Assim, fixada a reta $\ell$ na superfície cúbica não singular $\mathrm{X}$, obtemos as 11 retas

$$\ell, \ell_1, \ldots, \ell_5, \ell'_1, \ldots, \ell'_5.$$

Vamos a procura de mais retas!

Observe que:

- ao utilizarmos a reta $\ell_1$ em lugar de $\ell$, obtemos os planos $H_1, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ e $\Pi_4$ de modo que

$$H_1 \cap \mathrm{X} = \ell_1 \cup \ell \cup \ell'_1 \quad \text{e} \quad \Pi_i \cap \mathrm{X} = \ell_1 \cup m_i \cup m'_i.$$

Assim, fixada a reta $\ell$ na superfície cúbica não singular $\mathrm{X}$, obtemos as 11 retas

$$\ell, \ell_1, \ldots, \ell_5, \ell'_1, \ldots, \ell'_5.$$

Vamos a procura de mais retas!

Observe que:

- ao utilizarmos a reta $\ell_1$ em lugar de $\ell$, obtemos os planos $H_1, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ e $\Pi_4$ de modo que

$$H_1 \cap \mathrm{X} = \ell_1 \cup \ell \cup \ell'_1 \quad \text{e} \quad \Pi_i \cap \mathrm{X} = \ell_1 \cup m_i \cup m'_i.$$

- ao utilizarmos a reta $\ell'_1$ em lugar de $\ell$, obtemos os planos $H_1, \Pi'_1, \Pi'_2, \Pi'_3$ e $\Pi'_4$ de modo que

$$H_1 \cap \mathrm{X} = \ell'_1 \cup \ell \cup \ell_1 \quad \text{e} \quad \Pi'_i \cap \mathrm{X} = \ell'_1 \cup n_i \cup n'_i.$$

Assim, obtemos as 27 retas (distintas)

$$\ell, \ell_1, \ldots, \ell_5, \ell'_1, \ldots, \ell'_5,$$
$$m_1, \ldots, m_4, m'_1, \ldots m'_4, n_1, \ldots, n_4, n'_1, \ldots n'_4.$$

Assim, obtemos as 27 retas (distintas)

$$\ell, \ell_1, \ldots, \ell_5, \ell'_1, \ldots, \ell'_5,$$
$$m_1, \ldots, m_4, m'_1, \ldots m'_4, n_1, \ldots, n_4, n'_1, \ldots n'_4.$$

A seguir, vamos mostrar que

$$\#\{ \text{ retas contidas em } \mathrm{X} \} = 27.$$

Seja $\mathrm{L}$ uma reta contida na superfície cúbica não singular $\mathrm{X}$.

Seja $\mathrm{L}$ uma reta contida na superfície cúbica não singular $\mathrm{X}$. Se $\mathrm{L} = \ell$ (ótimo!).

Seja $\mathrm{L}$ uma reta contida na superfície cúbica não singular $\mathrm{X}$. Se $\mathrm{L} = \ell$ (ótimo!). Caso contrário (i.e. $\mathrm{L} \neq \ell$), considere o plano $H_1$ tal que $H_1 \cap \mathrm{X} = \ell \cup \ell_1 \cup \ell_1'$.

Seja $\mathrm{L}$ uma reta contida na superfície cúbica não singular $\mathrm{X}$. Se $\mathrm{L} = \ell$ (ótimo!). Caso contrário (i.e. $\mathrm{L} \neq \ell$), considere o plano $H_1$ tal que $H_1 \cap \mathrm{X} = \ell \cup \ell_1 \cup \ell_1'$.

Temos duas possibilidades:

$$\mathrm{L} \subset H_1 \quad \text{ou} \quad H_1 \cap \mathrm{L} = \{\mathrm{p}\}.$$

Seja $\mathrm{L}$ uma reta contida na superfície cúbica não singular $\mathrm{X}$. Se $\mathrm{L} = \ell$ (ótimo!). Caso contrário (i.e. $\mathrm{L} \neq \ell$), considere o plano $H_1$ tal que $H_1 \cap \mathrm{X} = \ell \cup \ell_1 \cup \ell_1'$.

Temos duas possibilidades:

$$\mathrm{L} \subset H_1 \quad \text{ou} \quad H_1 \cap \mathrm{L} = \{\mathrm{p}\}.$$

- $\mathrm{L} \subset H_1 \Longrightarrow \mathrm{L} \cap \ell \neq \emptyset \overset{Cor.}{\Longrightarrow} \mathrm{L} = \ell_1$ ou $\mathrm{L} = \ell_1'$.

Seja $\mathrm{L}$ uma reta contida na superfície cúbica não singular $\mathrm{X}$. Se $\mathrm{L} = \ell$ (ótimo!). Caso contrário (i.e. $\mathrm{L} \neq \ell$), considere o plano $H_1$ tal que $H_1 \cap \mathrm{X} = \ell \cup \ell_1 \cup \ell_1'$.

Temos duas possibilidades:

$$\mathrm{L} \subset H_1 \quad \text{ou} \quad H_1 \cap \mathrm{L} = \{\mathrm{p}\}.$$

- $\mathrm{L} \subset H_1 \Longrightarrow \mathrm{L} \cap \ell \neq \emptyset \overset{Cor.}{\Longrightarrow} \mathrm{L} = \ell_1$ ou $\mathrm{L} = \ell_1'$.
- $\mathrm{L} \not\subset H_1 \Longrightarrow \mathrm{p} \in \ell \cup \ell_1 \cup \ell_1'$ visto que $H_1 \cap \mathrm{L} \subset H_1 \cap \mathrm{X} = \ell \cup \ell_1 \cup \ell_1'$.

  Assim, $\mathrm{L}$ encontra pelo menos uma dentre as retas $\ell, \ell_1\, \ell_1'$.

Seja $\mathrm{L}$ uma reta contida na superfície cúbica não singular $\mathrm{X}$. Se $\mathrm{L} = \ell$ (ótimo!). Caso contrário (i.e. $\mathrm{L} \neq \ell$), considere o plano $H_1$ tal que $H_1 \cap \mathrm{X} = \ell \cup \ell_1 \cup \ell_1'$.

Temos duas possibilidades:

$$\mathrm{L} \subset H_1 \quad \text{ou} \quad H_1 \cap \mathrm{L} = \{\mathrm{p}\}.$$

- $\mathrm{L} \subset H_1 \Longrightarrow \mathrm{L} \cap \ell \neq \emptyset \overset{Cor.}{\Longrightarrow} \mathrm{L} = \ell_1$ ou $\mathrm{L} = \ell_1'$.
- $\mathrm{L} \not\subset H_1 \Longrightarrow \mathrm{p} \in \ell \cup \ell_1 \cup \ell_1'$ visto que $H_1 \cap \mathrm{L} \subset H_1 \cap \mathrm{X} = \ell \cup \ell_1 \cup \ell_1'$.

  Assim, $\mathrm{L}$ encontra pelo menos uma dentre as retas $\ell, \ell_1\, \ell_1'$.