# Contando retas em superfícies no espaço projetivo

Jacqueline Rojas - UFPB Sally Andria - UFF Wállace Mangueira - UFPB

Julho 2023

# Apresentações



Figure: Execução do meme referente à montagem da animação de 1967.

# Qual é o problema?

Queremos contar retas em superfícies.



Figure: Museus Bauhaus em Berlim.



Figure: Estação de trêm na Itália

# Qual é o problema?

#### Qual a utilidade em contar retas em superfícies?

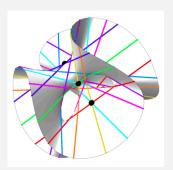


Figure: Superfície de Clebsch

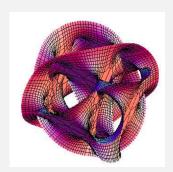


Figure: Superfície Calabi-Yau (Teoria das cordas - Física)



# Mas você conseguiu ver as retas?



Figure: Veja a Superfície de Clebsch por todos os ângulos!

Qual é a quantidade máxima de retas que uma superfície projetiva não singular de grau d no espaço projetivo pode conter?

• Será que toda superfície projetiva contém retas?

- Será que toda superfície projetiva contém retas?
- O número de retas está relacionado ao grau da superfície?

- Será que toda superfície projetiva contém retas?
- O número de retas está relacionado ao grau da superfície?
- Será que existe um número máximo de retas numa superfície de grau fixado?



- Será que toda superfície projetiva contém retas?
- O número de retas está relacionado ao grau da superfície?
- Será que existe um número máximo de retas numa superfície de grau fixado?
- Se existe número máximo, ele é atingido pra toda superfície de mesmo grau ou é apenas uma cota superior?



As nossas retas e superfícies são objetos do espaço projetivo complexo ( $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ ), carinhosamente denotado por  $\mathbb{P}^3$ .

As nossas retas e superfícies são objetos do espaço projetivo complexo ( $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ ), carinhosamente denotado por  $\mathbb{P}^3$ .

As nossas retas e superfícies são objetos do espaço projetivo complexo ( $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ ), carinhosamente denotado por  $\mathbb{P}^3$ .

Logo, pra começar a brincadeira de verdade, precisamos responder

• Quem é  $\mathbb{P}^3$ ?

As nossas retas e superfícies são objetos do espaço projetivo complexo ( $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ ), carinhosamente denotado por  $\mathbb{P}^3$ .

- Quem é  $\mathbb{P}^3$ ?

As nossas retas e superfícies são objetos do espaço projetivo complexo ( $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ ), carinhosamente denotado por  $\mathbb{P}^3$ .

- Quem é  $\mathbb{P}^3$ ?
- Como são as retas em  $\mathbb{P}^3$ ?
- E as superfícies?

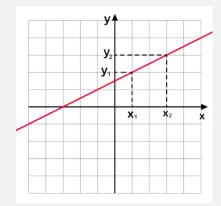
As nossas retas e superfícies são objetos do espaço projetivo complexo ( $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ ), carinhosamente denotado por  $\mathbb{P}^3$ .

- Quem é  $\mathbb{P}^3$ ?
- Como são as retas em  $\mathbb{P}^3$ ?
- E as superfícies?
- Como saber quando uma reta está contida numa superfície?

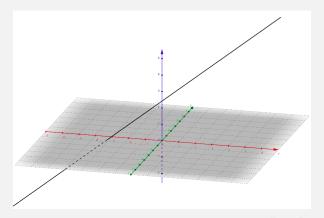
Lembra quando te apresentaram uma correspondência entre a álgebra e a geometria? Quando trouxeram polinômios para identificar certas figuras geométicas?

Lembra quando te apresentaram uma correspondência entre a álgebra e a geometria? Quando trouxeram polinômios para identificar certas figuras geométicas?

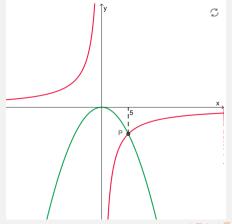
Reta no plano  $\mathbb{R}^2$ ax + by + c = 0



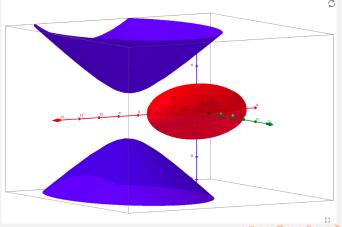
Reta no espaço 
$$\mathbb{R}^3$$
 (interseção de planos)  $ax+by+cz+d=0$  e  $a'x+b'y+c'z+d'=0$ 



Cônica no plano 
$$\mathbb{R}^2$$
  $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ 



Quádrica no espaço 
$$\mathbb{R}^3$$
 
$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+iz+j=0$$



Reta no plano 
$$\mathbb{R}^2$$
 
$$ax + by + c = 0$$
 Reta no espaço  $\mathbb{R}^3$  
$$ax + by + cz + d = 0, a'x + b'y + c'z + d' = 0$$
 Cônica no plano  $\mathbb{R}^2$  
$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$
 Quádrica no espaço  $\mathbb{R}^3$  
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

Nesta correspondência algebro-geométrica note que quantidade de variáveis  $(x,y,z\ldots)$  depende do local (plano, espaço...) e o grau do polinômio  $(1,2\ldots)$  depende do objeto referido.

Vamos começar definindo de forma geral?

O n—espaço projetivo complexo, denotado por  $\mathbb{P}^n$ , é o conjunto de todos os subespaços de dimensão 1 do espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^{n+1}$ 

Vamos começar definindo de forma geral?

O n-espaço projetivo complexo, denotado por  $\mathbb{P}^n$ , é o conjunto de todos os subespaços de dimensão 1 do espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

Como é que é?

Vamos começar definindo de forma geral?

O n-espaço projetivo complexo, denotado por  $\mathbb{P}^n$ , é o conjunto de todos os subespaços de dimensão 1 do espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

Como é que é?

Os pontos de  $\mathbb{P}^n$  serão as retas em  $\mathbb{C}^{n+1}$  que passam pela origem!

Formalmente, um ponto em  $\mathbb{P}^n$  é da forma [v], com v vetor não nulo em  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

Para  $\mathbf{v}=(v_0,\ldots,v_n)$ , denotaremos  $[\mathbf{v}]=[v_0:\ldots:v_n]$  e denominamos  $v_0,\ldots,v_n$  por coordenadas homogêneas do ponto  $[\mathbf{v}]$ .

Formalmente, um ponto em  $\mathbb{P}^n$  é da forma [v], com v vetor não nulo em  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

Para  $\mathbf{v}=(v_0,\ldots,v_n)$ , denotaremos  $[\mathbf{v}]=[v_0:\ldots:v_n]$  e denominamos  $v_0,\ldots,v_n$  por coordenadas homogêneas do ponto  $[\mathbf{v}]$ .

Observe que,

$$[a_0:\ldots:a_n]=[b_0:\ldots:b_n]\Leftrightarrow (a_0,\ldots,a_n)=\lambda(b_0,\ldots,b_n)$$
 para algum  $\lambda\in\mathbb{C}$  não nulo.

Logo, pontos distintos são determinados por vetores LI.

# O espaço projetivo se parece com o real?

Assim como tínhamos com  $\mathbb{R}^n$ , o objetos  $\mathbb{P}^1$ ,  $\mathbb{P}^2$  e  $\mathbb{P}^3$  são denominados de *reta projetiva*, *plano projetivo* e *espaço projetivo*, respectivamente.

# O espaço projetivo se parece com o real?

Assim como tínhamos com  $\mathbb{R}^n$ , o objetos  $\mathbb{P}^1$ ,  $\mathbb{P}^2$  e  $\mathbb{P}^3$  são denominados de *reta projetiva*, *plano projetivo* e *espaço projetivo*, respectivamente.

Será que a gente consegue enxergar?

# O espaço projetivo se parece com o real?

Assim como tínhamos com  $\mathbb{R}^n$ , o objetos  $\mathbb{P}^1$ ,  $\mathbb{P}^2$  e  $\mathbb{P}^3$  são denominados de *reta projetiva*, *plano projetivo* e *espaço projetivo*, respectivamente.

Será que a gente consegue enxergar?

Só precisamos ser cuidadosos com as definições, e lembrar que estamos sempre numa dimensão a mais, enxergando uma dimensão a menos.

Calma que eu desenho/te explico!

# Agora vamos as equações: Polinômios homogêneos

Retas e superfícies no espaço projetivo complexo também são definidos a partir de pontos que satisfazem polinômios, o conjunto dos zeros de um polinômio especial, eles precisam ser homogêneos.

# Agora vamos as equações: Polinômios homogêneos

Retas e superfícies no espaço projetivo complexo também são definidos a partir de pontos que satisfazem polinômios, o conjunto dos zeros de um polinômio especial, eles precisam ser homogêneos.

#### Polinômio homogêneo

 $f \in \mathbb{C}[x_0,\ldots,x_n]$  não nulo é homogêneo de grau  $d \geq 0$  se

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Também consideramos o polinômio nulo como sendo homogêneo.

Note que todos os monômios de f têm grau d.



# Zeros de polinômios homogêneos

A homogeneidade de f garante a definição de  $\mathcal{Z}(f)$ !

- f=0, então  $\mathcal{Z}(0)=\mathbb{P}^n$ ;
- $f = c, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , então  $\mathcal{Z}(c) = \emptyset$ ;
- $f \in \mathbb{C}[x_0,\ldots,x_n]$  homogêneo, o *conjunto dos zeros* de f

$$\mathcal{Z}(f) = \{ [\mathbf{v}] \in \mathbb{P}^n \mid f(\mathbf{v}) = 0 \}$$

ullet Se  $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$  são homogêneos, então

$$\mathcal{Z}(f_1, f_2, \dots, f_k) = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{Z}(f_i).$$

# Zeros de polinômios homogêneos

Seja  $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  polinômio homogêneo e não constante (e pra sempre homogêneo, a menos dito o contrário).

 $\mathcal{Z}(f)$  é denominada hipersuperfície definida por f em  $\mathbb{P}^n$ .

Em cada espaço (e simplificando as variáveis), acontece o seguinte

- n=1: Na reta projetiva ( $\mathbb{P}^1$ ), seja  $f\in\mathbb{C}[x,y]$ . O  $\mathcal{Z}(f)$  é um **conjunto finito de pontos**.
- n=2: No plano projetivo ( $\mathbb{P}^2$ ), seja  $f\in\mathbb{C}[x,y,z]$ . O  $\mathcal{Z}(f)$  é dito **curva projetiva plana**. Se o grau de f for 1, então  $\mathcal{Z}(f)$  é uma reta!

### No espaço projetivo

• n=3: No espaço projetivo ( $\mathbb{P}^3$ ), seja  $f\in\mathbb{C}[x,y,z,t]$ .

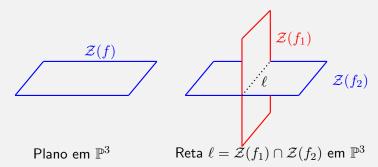
Denotaremos por  $S_d$  o subespaço de  $S:=\mathbb{C}[x,y,z,t]$  gerado por todos os monômios de grau d.

O conjunto  $\mathcal{Z}(f)$  é dito superfície projetiva.

Se  $f \in S_1$ ,  $\mathcal{Z}(f)$  é um *plano* em  $\mathbb{P}^3$ .

# Retas no espaço projetivo

Uma reta em  $\mathbb{P}^3$  é dada pela interseção de planos distintos, i.e.  $\mathcal{Z}(f_1)$  e  $\mathcal{Z}(f_2)$  com  $f_1$  e  $f_2$  LI.



# Superfícies no espaço projetivo

Quando d=2,3,4, também usamos os termos superfície quádrica, cúbica, quártica, respectivamente.

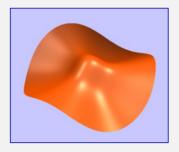


Figure: Superfície de Fermat

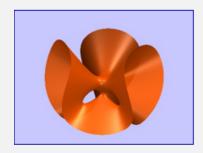


Figure: Superfície de Clebsch

# E aquela história de singularidade?

#### Ponto singular de $\mathcal{Z}(f)\subset\mathbb{P}^3$

Seja  $f \in \mathbb{C}[x,y,z,t]$  homogêneo de grau  $d \geq 1$ .

Um ponto  $[\mathbf{v}] \in \mathbb{P}^3$  é dito *ponto singular de*  $\mathcal{Z}(f)$  se as derivadas parciais de f em relação às variáveis x,y,z e t aplicadas em  $[\mathbf{v}]$  são nulas, i.e.

$$\partial_x f(\mathbf{v}) = \partial_y f(\mathbf{v}) = \partial_z f(\mathbf{v}) = \partial_t f(\mathbf{v}) = 0.$$

# E aquela história de singularidade?

#### Ponto singular de $\mathcal{Z}(f)\subset\mathbb{P}^3$

Seja  $f \in \mathbb{C}[x,y,z,t]$  homogêneo de grau  $d \geq 1$ .

Um ponto  $[\mathbf{v}] \in \mathbb{P}^3$  é dito *ponto singular de*  $\mathcal{Z}(f)$  se as derivadas parciais de f em relação às variáveis x,y,z e t aplicadas em  $[\mathbf{v}]$  são nulas, i.e.

$$\partial_x f(\mathbf{v}) = \partial_y f(\mathbf{v}) = \partial_z f(\mathbf{v}) = \partial_t f(\mathbf{v}) = 0.$$

Assim, o  $\mathcal{Z}(f)$  é *não singular* se não possuir pontos singulares. Por exemplo, todo plano em  $\mathbb{P}^3$  é não singular.

#### Superfície não singular em $\mathbb{P}^3$

 $\mathcal{Z}(f) \subset \mathbb{P}^3$  é dita  $\textit{superficie n\~ao singular}$  se n\~ao possuir pontos singulares.



Olhemos para as equações no espaço projetivo.

Olhemos para as equações no espaço projetivo.

Se uma reta  $\ell$  é a interseção de dois planos, então  $\ell=\mathcal{Z}(L_1,L_2),$  no qual  $L_1,L_2\in S_1$  linearmente independentes.

Olhemos para as equações no espaço projetivo.

Se uma reta  $\ell$  é a interseção de dois planos, então  $\ell = \mathcal{Z}(L_1, L_2)$ , no qual  $L_1, L_2 \in S_1$  linearmente independentes.

Uma superfície não singular de grau d é  $\mathcal{Z}(f)$ , para algum  $f \in S_d$ .

Olhemos para as equações no espaço projetivo.

Se uma reta  $\ell$  é a interseção de dois planos, então  $\ell=\mathcal{Z}(L_1,L_2),$  no qual  $L_1,L_2\in S_1$  linearmente independentes.

Uma superfície não singular de grau d é  $\mathcal{Z}(f)$ , para algum  $f \in S_d$ .

Se a reta  $\ell$  está contida em  $\mathcal{Z}(f)$  então f pode ser escrita como combinação dos polinômios  $L_1, L_2$ . Ou seja

$$\mathcal{Z}(L_1, L_2) = \ell \subset \mathcal{Z}(f) \Leftrightarrow f = AL_1 + BL_2, \quad A, B \in S_{d-1}.$$

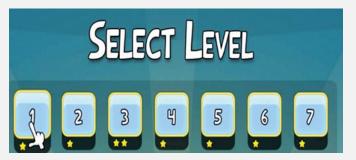
### Agora, já da pra entender o problema!

Qual é a quantidade máxima de retas que uma superfície projetiva não singular de grau d no espaço projetivo pode conter?

#### Agora, já da pra entender o problema!

Qual é a quantidade máxima de retas que uma superfície projetiva não singular de grau d no espaço projetivo pode conter?

Vamos atacar o problema por partes!



# Level 1: Retas no plano

Consideremos um plano  $\mathcal{Z}(F),$  ou seja, F é não nulo, homogêneo de grau 1.

Seja  $[F,L_1,L_2,L_3]$  uma base para os polinômios homogêneos de grau 1.

Então podemos definir

$$\mathbb{P}^2$$
  $\longrightarrow$  { retas contidas em  $\mathcal{Z}(F)$ }  $[a:b:c]$   $\mapsto$   $\mathcal{Z}(F,aL_1+bL_2+cL_3)$ 

# Level 2: Retas nas quádricas

Uma superfície quádrica em  $\mathbb{P}^3$  é definida por  $\mathcal{Z}(F)$  com F não nulo, homogêneo de grau 2.

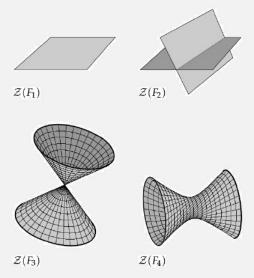
#### **Corolário** (Classificação das quádricas em $\mathbb{P}^3$ )

Uma superfície quádrica em  $\mathbb{P}^3$  é definida por um polinômio que assume uma das seguintes formas:

- (i)  $F_1 = x^2$
- (ii)  $F_2 = x^2 + y^2$
- (iii)  $F_3 = x^2 + y^2 + z^2$
- (iv)  $F_4 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$

Além disso, toda quádrica não singular é equivalente a  $\mathcal{Z}(F_4)$ .

# Olha a foto das quádricas do corolário!



### Respostas do problema para os levels

#### Superfície não singular de grau 1 em $\mathbb{P}^3$

A superfície é um plano e contém infinitas retas!

#### Superfície não singular de grau 2 em $\mathbb{P}^3$

A superfície é a quádrica não singular que contém duas famílias de retas que se concorrem. Logo, a superfície contém infinitas retas!

