Equações Diferenciais Parciais e Homologia

Artur Jorge Marinho

Universidade Federal de Goiás

arturxjorge@gmail.com

impa

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

No estudo de pontos críticos de funcionais não lineares, um método básico é o princípio do minimax. Neste trabalho, será apresentado uma conexão entre a teoria de homologia e uma versão do princípio do minimax

Introdução

Neste trabalho, M é uma variedade de Finsler de classe C^2 e $f \in C^1(M, \mathbb{R})$

Definição 1. Seja D uma bola k-topológica em M, e seja S um subconjunto em M. Dizemos que ∂D e S lincam homotopicamente, se $\partial D \cap S = \emptyset$ e $\varphi(D) \cap S \neq \emptyset$ para cada $\varphi \in C(D, M)$ tal que $\varphi_{|\partial D} = id_{|\partial D}$.

Definição 2. Seja D uma bola k-topológica em M, e seja S um subconjunto em M. Dizemos que ∂D e S lincam homologicamente, se $\partial D \cap S = \emptyset$ e $|\tau| \cap S \neq \emptyset$, para cada k-cadeia singular τ com $\partial \tau = \partial D$ onde $|\tau|$ é a imagem de τ.

Definição 3. Dizemos que f satisfaz a condição $(PS)_c$ se qualquer sequência $\{x_n\} \subset M$ tal que $f(x_n) \to c$ e $f'(x_n) \to 0$ possui uma subsequência convergente.

Definição 4. $f_t := \{x \in M : f(x) \leq t\}$.

Resultados

Teorema 1. Assuma que ∂D e S lincam homologicamente. Se $f \in C(M, \mathbb{R})$ e

$$f(x) > a \ \forall x \in S \tag{1}$$
$$f(x) \leq a \ \forall x \in \partial D. \tag{2}$$

então $H_k(f_b, f_a) \neq 0$, onde $b >$ Max $\{f(x) | x \in \overline{D}\}$.

Teorema 2. Suponha que a fronteira ∂D da bola k-topológica D e S lincam homotopicamente. Assuma que

1. $S \cap D =$ único ponto;
2. S é uma subvariedade orientável conexa por caminhos de codimensão k;
3. existe uma vizinhança tubular N de S tal que $N \cap D$ é homeomorfo a D.

Então ∂D e S lincam homologicamente.

Exemplo 1. (*Passo da Montanha*). Seja X um espaço de Banach, $f \in C^1(X, \mathbb{R})$, $e \in X$ e $r > 0$ tais que $\|e\| > r$ e

$$m := \inf_{\|u\|=r} f(u) > f(0) \geq f(e) \tag{3}$$

Então se D é a reta ligando a origem ao ponto e, e $S := \{u \in X : \|u\| = r\}$ temos que D e S se lincam homotopicamente e portanto pelo **Teorema 2** se lincam também homologicamente e por fim, pelo **Teorema 1** $H_1(f_b, f_a) \neq 0$.

Teorema 3. (*Primeiro lema da deformação.*) Seja M uma variedade de Finsler de classe C^2. Suponha que $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ satisfaz a condição $(PS)_c$. Assuma que N é uma vizinhança fechada de $K_c = K \cap f^{-1}(c)$. Então existe uma aplicação contínua $\eta : [0,1] \times M \to M$ e constantes $\bar{\varepsilon} > \varepsilon > 0$ tais que

1. $\eta(0, \cdot) = id$,
2. $\eta(t, \cdot)|_{Cf^{-1}[c-\bar{\varepsilon}, c+\bar{\varepsilon}]} = id|_{Cf^{-1}[c-\bar{\varepsilon}, c+\bar{\varepsilon}]}$
3. $\eta(t, \cdot) : M \to M$ é um homeomorfismo $\forall t \in [0,1]$
4. $\eta(1, f_{c+\varepsilon \setminus N}) \subset f_{c-\varepsilon}$,
5. $f \circ \eta(t, x)$ é não-crescente em t $\forall (t, x) \in [0,1] \times M$.

Utilizando o **Teorema 3** acima, podemos provar o

Teorema 4. (*Princípio do Minimax*) Suponha que $\mathscr{F}$ é uma família de subconjuntos de M. Defina

$$c = \inf_{F \in \mathscr{F}} \sup_{x \in F} f(x) \tag{4}$$

Assuma que c é finito, f satisfaz a condição $(PS)_c$ e $\exists \varepsilon_0 > 0$ tal que a família $\mathscr{F}$ é invariante em relação à família de aplicações

$$\phi_{\varepsilon_0} = \left\{\varphi \in C(M, M) : \varphi \sim id, \varphi|_{f_{c-\varepsilon_0}} = id|_{f_{c-\varepsilon_0}}\right\}$$

Então c é um valor crítico de f.

O teorema acima nos possibilita então provar o

Teorema 5. Seja $a < b$ valores regulares de f. Defina

$$c = \inf_{\tau \in \alpha} \sup_{x \in |\tau|} f(x) \quad \text{com} \quad \alpha \in H_k(f_b, f_a) \text{não trivial}$$

Assuma que $c > a$ e que f satisfaz a condição $(PS)_c$. Então c é um valor crítico de f.

Aplicando o **Teorema 5** no **Exemplo 1**, e supondo que f satisfaz a condição $(PS)_c$ (mesma notação do teorema acima) temos que f possui um valor crítico.

Como aplicação, podemos resolver o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2} u \\ u \geq 0, u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{5}$$

Onde Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$. Com $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$ onde $\lambda_1(\Omega) := \inf_{u \in H_0^1(\Omega), |u|_2 = 1} |\nabla u|_2^2$ e $2 < p < 2N/(N-2)$.

Para tal, basta verificar que o funcional

$$f(u) = \int_\Omega \left[\frac{|\nabla u|^2}{2} + \lambda \frac{u^2}{2} - \frac{(u^+)^p}{p}\right] \tag{6}$$

satisfaz as condições do **Exemplo 1** e **Teorema 5**.

Conclusão

Podemos concluir que usando teoria de homologia, conseguimos resultados muito gerais que generalizam, em certo sentido, os resultados mais básicos na teoria de ponto críticos de funcionais. Por exemplo, segue do Exemplo 1 e Teorema 5, que o tão conhecido *Teorema do Passo da Montanha* é um caso particular da teoria aqui apresentada.

Referências

[1] Kung-ching Chang. Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems. Progress in nonlinear differential equations and their applications, 1991.

[2] Willem, Michel. Minimax Theorems. Progress in nonlinear differential equations and their applications, 1996.

Agradecimentos

Agradeço aqui o apoio do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal da Goiás, e também à CAPES.