

Mergulhando uma dinâmica qualquer no replicador discreto de tipo II

Arthur Tauchen, Alexandre Baraviera

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

arthurtauchen@gmail.com



Resumo

A dinâmica do replicador é usada em teoria dos jogos para modelar como populações de indivíduos interagem baseados em estratégias predefinidas. Neste trabalho mostraremos que dada qualquer dinâmica, sob certas condições, esta pode ser mergulhada em um replicador discreto de tipo II. Este trabalho foi inspirado por [5].

Introdução

Dada uma função $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$ a dinâmica do replicador discreto de tipo II associada a f é o mapa

$$x'_i = \frac{x_i f_i(x)}{\sum_{k=1}^n x_k f_k(x)}$$

onde, x'_i significa a i -ésima coordenada do próximo iterado. É fácil ver que o simplexo $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ é preservado pela dinâmica.

Resultados

Caso $n = 2$

Quando $n = 2$, tomamos $x = x_1$ e $x_2 = 1 - x_1$. Seja $g : [2/5, 3/5] \rightarrow [2/5, 3/5]$ dada. Queremos mostrar que a dinâmica de g pode ser vista como a restrição da dinâmica de um certo replicador em um conjunto adequado. Para isto, devemos exibir a função $f(x, 1 - x) = (f_1(x, 1 - x), f_2(x, 1 - x))$ adequada. Definimos a função auxiliar $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ como:

$$\phi(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{5} \\ g(x), & \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}, & \frac{4}{5} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Agora defina

$$f_1(x, 1 - x) = \frac{1}{x} \phi(x), \quad f_2(x, 1 - x) = \frac{1}{1 - x} (1 - \phi(x)).$$

Desta forma, o denominador da dinâmica é dado por $x f_1(x, 1 - x) + (1 - x) f_2(x, 1 - x) = 1$ e obtemos

$$x' = \phi(x).$$

Em particular, isso mostra que a dinâmica do replicador restrito a $[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$ coincide com a dinâmica da g , como queríamos. Para definir ϕ em $[0, 1]$, de forma a ter a maior regularidade possível, nós usamos funções teste, de modo que ϕ terá a mesma classe de diferenciabilidade de g .

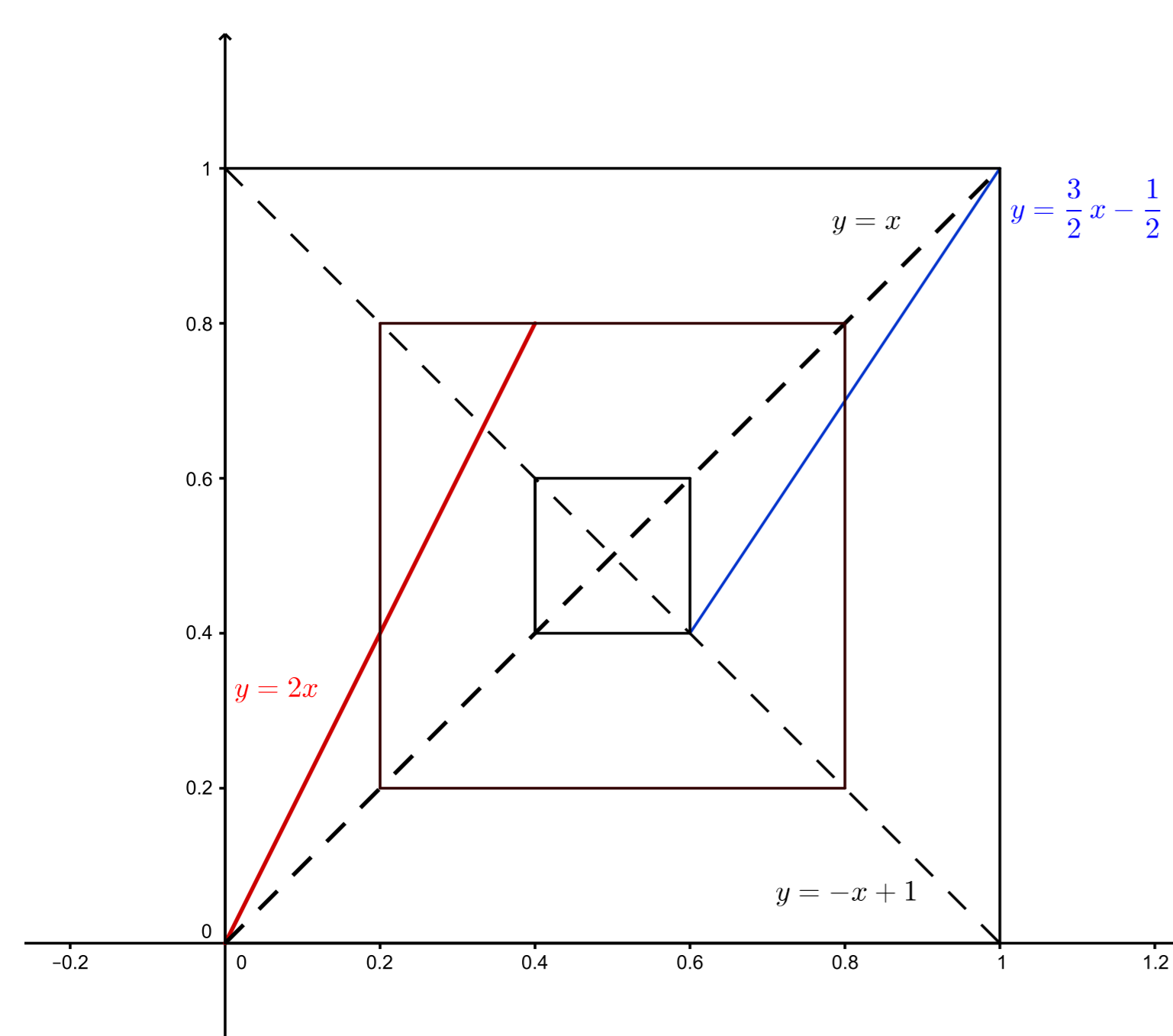


Figura: Modelo para o caso $n = 2$.

O caso $n = 3$

Neste caso, usando $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$, sujeito à restrição $x + y + z = 1$, as variáveis (x, y) encontram-se na região $T = \{x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Considere uma função $g : B(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}) \rightarrow B(\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$ dada. Queremos mostrar que a dinâmica de g pode ser vista como a dinâmica de um certo replicador em um conjunto adequado. Começamos definindo $\Phi : T \rightarrow T$, dada por $\Phi(x, y) = (x, y) + n(x, y)\Psi(x, y)$, onde

$$\Psi(x, y) = \min_{(x,y) \in T} \{d((x, y), \partial T), \varepsilon\}, \quad n(x, y) = \frac{(\frac{1}{4} - x, \frac{1}{4} - y)}{\|n(x, y)\|}$$

Para $0 < \varepsilon < 1$ fixado. Note que Φ mantém o simplexo invariante e além disso, Φ “empurra” a dinâmica para o centro de T .

Agora podemos definir a função

$$\phi(x, y) = \bar{g}(x, y)p(x, y) + \Phi(x, y)(1 - p(x, y)).$$

onde \bar{g} é uma extensão de g obtida usando ideias de análise complexa no plano encontradas em [2] e p uma função teste. Finalmente, escrevendo $f_1 = (1/x)\phi_1, f_2 = (1/y)\phi_2$ e $f_3 = \frac{1}{1-x-y}(1 - \phi_1 - \phi_2)$. Portanto,

$$x' = \phi_1(x, y), \quad y' = \phi_2(x, y)$$

e o caso $n = 3$ está provado.

O caso $n > 3$

Considere $\Psi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\Psi(x) = \frac{1}{8\|x\|}x$, a extensão radial de $g, G : B[\frac{1}{4}, \frac{3}{16}] \rightarrow B[\frac{1}{4}, \frac{3}{16}]$ dada por

$$G(x) = \begin{cases} g(x), & x \in B[\frac{1}{4}, \frac{1}{8}] \\ g \circ \Psi(x), & x \in B[\frac{1}{4}, \frac{3}{16}] \setminus B[\frac{1}{4}, \frac{1}{8}]. \end{cases}$$

Para $x \in \mathbb{R}^n$, e as versões n -dimensionais de p e Φ , tome a função

$$\phi(x) = G(x)p(x) + \Phi(x)(1 - p(x)).$$

com este processo, a dinâmica converge para $B[\frac{1}{4}, \frac{1}{8}]$, não importando onde ela começa e coincide com g .

Referências

- [1] Amie Albrecht, Konstantin Avrachenkov, Phil Howlett, and Geetika Verma. Evolutionary dynamics in discrete time for the perturbed positive definite replicator equation. *The ANZIAM Journal*, 62(2):148–184, 2020.
- [2] Peter Duren and Walter Hengartner. Harmonic mappings of multiply connected domains. *pacific journal of mathematics*, 180(2):201–220, 1997.
- [3] Josef Hofbauer and Karl Sigmund. The theory of evolution and dynamical systems: mathematical aspects of selection. (No Title), 1988.
- [4] Josef Hofbauer and Karl Sigmund. Evolutionary game dynamics. *Bulletin of the American mathematical society*, 40(4):479–519, 2003.
- [5] Steve Smale. On the differential equations of species in competition. *Journal of Mathematical Biology*, 3(1):5–7, 1976.

Agradecimentos

Ao CNPq e ao Impa pelo apoio financeiro.