Uma Aplicação do Método de Galerkin em Equações Não-Lineares

Anna Júlia Gonçalves Veronezi

Universidade Federal de Juiz de Fora

annajuliagv@gmail.com

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Um dos métodos utilizados para mostrar a existência de uma solução para EDPs é o Método de Galerkin. Neste trabalho, daremos uma breve noção de como usar o Método de Galerkin para garantir a existência da solução de um problema elíptico envolvendo singularidade e termo de convecção. Por fim, mostraremos um exemplo de problema que pode ser resolvido por esse método.

Introdução

Estudaremos o seguinte problema:

$$-\Delta u = h(x,u) + \lambda g(x,\nabla u) \quad em \quad \Omega \qquad (1)$$
$$u > 0 \quad em \quad \Omega, \quad u = 0 \quad em \quad \partial\Omega$$

em que Ω é um domínio suave limitado em $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 1$, λ é um parâmetro positivo, h é uma função com termos sublineares e singulares e, por fim, g é uma função contínua.

Os problemas elípticos, não-lineares e com singularidade, como o problema que estamos estudando, aparecem em diversos contextos na natureza. Mais especificamente, podemos citar as áreas de mecânica dos fluidos e condutores. Compreendemos, então, a importância dos métodos que garantem a existência de suas soluções, como o Método de Galerkin.

Iremos mostrar como podemos usar o Método de Galerkin para obter a solução do problema (1), supondo as seguintes hipóteses sobre as funções h e g:

(H1) As funções $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são localmente Hölder contínuas;

(H2) Existem constantes $b > 0$, $0 < r_i < 1$, com $i = 1,2,3$ e $r_1 < r_2$, e funções contínuas positivas $a_i : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, com $i = 1,2,3$, tais que para todo $(x,u) \in \Omega$:

$$b|u|^{r_1} \leq h(x,u) \leq a_1(x) + a_2(x)|u|^{r_2} + \frac{a_3(x)}{|u|^{r_3}}$$

(H3) Existem uma constante $0 < r_4 < 1$ e funções contínuas a_4 e a_5 tais que, para todo $(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$:

$$0 \leq g(x,u) \leq a_5(x) + a_4(x)|u|^{r_4}$$

Notemos que a função h pode ter uma singularidade na segunda entrada. Por isso, mostraremos primeiro que, dado $\varepsilon > 0$ existe solução para o seguinte problema:

$$-\Delta u = h(x,|u|+\varepsilon) + \lambda g(x,\nabla u) \quad em \quad \Omega \qquad (2)$$
$$u > 0 \quad em \quad \Omega, \quad u = 0 \quad em \quad \partial\Omega$$

Usando esse resultado, concluiremos que o problema (1) tem, de fato, solução.

Resultados

Lema 1. *Seja $F : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^K$ uma função contínua com $\langle F(x), x\rangle \geq 0$ para x satisfazendo $|x| = R > 0$. Então, existe $z_0 \in \overline{B}_R(0)$ tal que $F(z_0) = 0$.*

Teorema 2. *Se valem (H1)-(H3), então o problema (2) tem solução fraca.*

Demonstração. Objetivo: Obter $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que para toda $\phi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx - \int_\Omega (h(x,|u|+\varepsilon)\phi + \lambda g(x,\nabla u)\phi) dx = 0$$

Seja $\{e_1, ..., e_n, ...\}$ base ortonormal de $H_0^1(\Omega)$. Trabalharemos com os subespaços $V_m = [e_1, ..., e_m]$, de modo que, pelo isomorfismo $T : V_m \to \mathbb{R}^m$ tal que para $v \in V_m$ dado por $v = \sum_{i=1}^m \xi_i e_i$, tomamos $T(v) = \xi = (\xi_1, ..., \xi_m)$.

Defina $F = (F_1, ..., F_m) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ com

$$F_i(\xi) = \int_\Omega \nabla v \nabla e_i dx - \int_\Omega (h(x,|v|+\varepsilon)e_i + \lambda g(x,\nabla v)e_i) dx \qquad (3)$$

Podemos mostrar que F é contínua e existe ρ tal que, para $|\xi| \leq \rho$, $\langle F(\xi), \xi\rangle \geq r > 0$. Pelo Lema 1, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $x_m \in \mathbb{R}^m$ tal que $|x_m| < \rho$ e $F(x_m) = 0$. Tomando v_m tal que $T(v_m) = x_m$, obtemos uma sequência (v_m) limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável, a sequência converge fracamente no espaço e pontualmente em Ω. Isso, junto com o Teorema da Convergência Dominada, nos auxilia a demonstrar que há convergência na norma ($v_m \to u \in H_0^1(\Omega)$).

Por fim, podemos usar novamente o Teorema da Convergência Dominada e mostrar que:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla e_i dx = \int_\Omega (h(x,|u|+\varepsilon)e_i + \lambda g(x,\nabla u)e_i) dx$$

Dada $\phi \in H_0^1(\Omega)$, podemos escrever $\phi = \sum_{i=1}^\infty \phi_i e_i$. Defina $\phi^{(m)} = \sum_{i=1}^m \phi_i e_i$, então $\phi^{(m)} \to \phi$. Usando a igualdade acima, podemos fazer combinações lineares e, passando o limite, obtemos o resultado esperado. □

Obs.: Podemos mostrar ainda a regularidade da solução fraca, $u \in C^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Lema 3. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $t^{-1}f(t)$ decresce para $t > 0$. Seja v_1 sub-solução e v_2 super-solução de:*

$$-\Delta v = f(v) \quad em \quad \Omega \qquad (4)$$
$$v > 0 \quad em \quad \Omega, \quad v = 0 \quad em \quad \partial\Omega$$

então $v_1(x) \geq v_2(x)$ para $x \in \Omega$

Teorema 4. *Se valem (H1)-(H3), então o problema (1) tem solução fraca.*

Demonstração. Tomemos $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, seja $u_{\varepsilon_n} = u_n$ solução do problema (2). Pela definição de solução fraca e pelas hipóteses, podemos mostrar que (u_n) é limitada e há convergência na norma $(u_n \to u)$. Podemos prosseguir como no teorema anterior para mostrar que u é solução fraca do problema (1).

Além disso, precisamos que $u(x) > 0$ para $x \in \Omega$. Para isso, basta notar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, pela hipótese (H2), u_n é super-solução do problema (3) com $f(v) = bv^{r_1}$. Tal problema tem solução única ψ em $C^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Pelo Lema 2, $u_n(x) \geq \psi(x) \quad \forall x \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$, donde $u(x) > 0$ quase sempre em Ω. □

Exemplo O Teorema 1 pode ser usado para provar a existência da solução do problema

$$-\Delta u = h(u) + \lambda g(|\nabla u|) \quad em \quad \Omega$$
$$u > 0 \quad em \quad \Omega, \quad u = 0 \quad em \quad \partial\Omega$$

ele tem solução quando $\lambda > 0$ e g e h são da forma

$$g(t) = \sum_{i=1}^{j} t^{\beta_i} \quad h(t) = t^{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{m} [cos(it)+1]t^{\alpha_i}$$

para alguns $j, m \in \mathbb{N}$, $\beta_i \in (0,1)$ com $i = 1, ..., j$ e $\alpha_k \in (0,1)$ com $k = 1, ..., m$.

Referências

[1] C. Alves, P. Carrião, and L. Faria. Existence of solutions to singular elliptic equations with convection terms via the galerkin method. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2010, 01 2010.

[2] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer-Verlag New York, 1 edition, 2010.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG).