Propriedades topológicas de shifts em árvores markovianas

Andressa Paola Cordeiro

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

paola.cordeiro@ufrgs.br

UFRGS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Resumo

Sistemas dinâmicos em árvores consistem de uma classe intermediária entre sistemas unidimensionais e multidimensionais a tempo discreto, pois carregam consigo características de ambos. Propriedades topológicas como irredutibilidade, mixing e caos no sentido de Devaney para shifts em árvores foram introduzidas em [1]. Nesse trabalho apresentamos resultados preliminares de pesquisa em andamento na área, respondendo problemas, até então em aberto, propostos por Ban e Chang, que relacionam entropia e propriedades topológicas nas árvores.

Introdução e primeiras definições

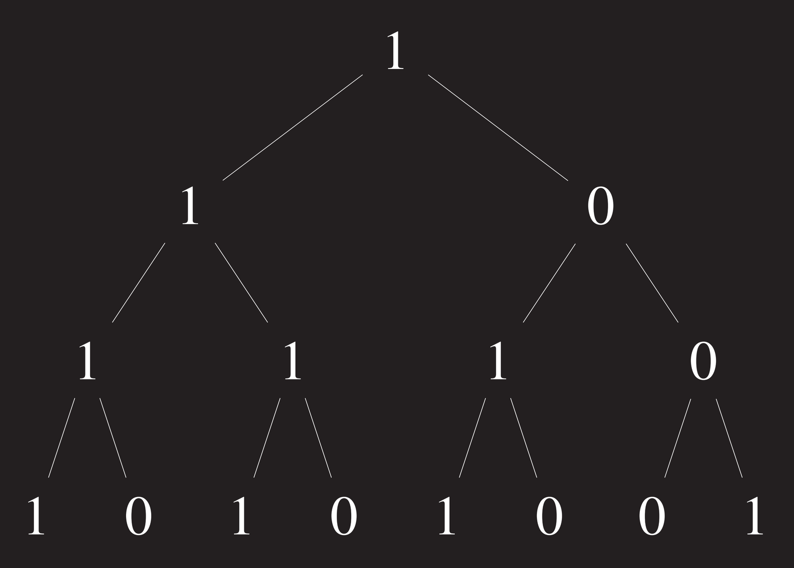
Este trabalho apresenta um recorte dos resultados obtidos em conjunto com o professor Alexandre Tavares Baraviera, orientador de doutorado da autora. As demonstrações e demais resultados da pesquisa podem ser encontrados no artigo [3].

Seja $\Sigma = \{a, b\}$ o conjunto dos geradores do monoide livre Σ^* com operação de concatenação, cujos elementos são palavras finitas de qualquer tamanho e a palavra vazia ϵ, e considere o alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Uma *árvore* t é uma função de Σ^* em $\mathcal{A}$. Uma palavra de Σ^* é dita *nó* de t e ϵ correspone à sua raiz. Cada nó $x \in \Sigma^*$ possui filhotes xa e xb, e denotamos $t(x)$ por t_x. Definimos $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ como o conjunto $\mathcal{A}^{\Sigma^*}$ de todas as árvores binárias no alfabeto $\mathcal{A}$.

Para $t, t' \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$, defina $d(t,t) = 0$ e $d(t,t') = \frac{1}{2^n}$ se $t \neq t'$, onde n é o comprimento da menor palavra x em Σ^* tal que $t_x \neq t'_x$. Nesta métrica, $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ é compacto.

Defina $\sigma_a, \sigma_b : \mathcal{T}(\mathcal{A}) \to \mathcal{T}(\mathcal{A})$ de modo que $\sigma_i(t)_x = t_{ix}$, $i \in \{a, b\}$, $x \in \Sigma^*$. O espaço $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ equipado com σ_a e σ_b é chamado *shift completo na árvore* sobre $\mathcal{A}$.

Um *bloco de tamanho* n, denotado por $\Delta_n = \cup_{i=0}^{n} \Sigma^i$, é a subárvore inicial de tamanho n de uma árvore em $\mathcal{T}(\mathcal{A})$, $n \geq 0$. Veja abaixo um exemplo de bloco de tamanho 3.



Um *subshift* X de $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ é o conjunto $X_{\mathcal{F}}$ de todas as árvores que não contêm nenhum *bloco proibido* de $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{F}$ é finito, dizemos que $X_{\mathcal{F}}$ é um *subshift de tipo finito*. Se esse comprimento é um, dizemos que $X_{\mathcal{F}}$ é um *subshift de Markov*, e as transições permitidas podem ser estabelecidas por meio de duas matrizes binárias M e N, onde as transições na direção a são determinadas por M e as transições na direção b são dadas por N. Nesse caso, escrevemos $X = (M, N)$.

Objetivos

Ban e Chang [1] propõem os seguintes problemas no contexto de shifts nas árvores:

Problema 3. Se $h_{BC}(X) > 0$, então X é caótico?

Problema 4. Se X é irredutível de tipo finito, então $h_{BC}(X) > 0$? Se X for mixing, então $h_{BC}(X) > 0$?

Nesse trabalho, fornecemos os contraexemplos apresentados em [3] para o Problema 3 e para o primeiro questionamento do Problema 4. Pelo Teorema 1, a seguir, é suficiente determinarmos contraexemplos considerando h_{PS}.

Entropia para shifts em árvores

Considere X um shift na árvore sobre o alfabeto $\mathcal{A}$ e defina p a *função de complexidade* de X de modo que $p(n)$ seja o número de blocos permitidos em X de tamanho n. Ban e Chang [2] e Petersen e Salama [4] definem entropia nas árvores, respectivamente, por

$$h_{BC} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \log p(n)}{n} \quad \text{e} \quad h_{PS} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log p(n)}{2^{n+1}}.$$

Teorema 1. (C., Baraviera, Becker, 2023) Para todo shift nas árvores sobre $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, se $h_{PS} > 0$, então $h_{BC} = \log 2$.

Propriedades topológicas de shifts em árvores

Dizemos que X é *irredutível* se, para qualquer par de blocos permitidos u e v de comprimento n, existir $t \in X$ e um conjunto completo de prefixos P cujas palavras têm comprimento pelo menos n, de modo que u é o bloco de t com raiz ϵ e, para cada $x \in P$, v é o bloco de t com raiz em x.

Um shift na árvore X é dito *caótico* (no sentido de Devaney) se for topologicamente transitivo, seus pontos periódicos forem densos e possuir dependência sensível nas condições iniciais. Em [1] os autores definem cada um desses conceitos, bem como fazemos em [3].

Contraexemplos para os Problemas 3 e 4

Provaremos que $X = (A, B)$ é não caótico e possui entropia positiva, e que $Y = (C, C)$ é irredutível e possui entropia zero, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para a entropia, basta perceber que, para X, $p(n) = 2^{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo, $h_{PS}(X) = \frac{1}{2} \log 2$ e, para Y, $p(n) = 2$, donde $h_{PS}(Y) = 0$.

Proposição 2. (C., Baraviera, Becker, 2023) O tree-shift $Y = (C, C)$ não é irredutível.

Demonstração. O Teorema 4.3 de [1] afirma que, se X é irredutível, as matrizes de transição que o definem são irredutíveis. Pela contrapositiva, segue o resultado. □

Proposição 3. (C., Baraviera, Becker, 2023) O tree-shift $X = (A, B)$ não é caótico.

Demonstração. Prova-se que pontos periódicos não são densos em X. Veja [3]. □

Referências

[1] Jung-Chao Ban and Chih-Hung Chang. Tree-shifts: Irreducibility, mixing, and the chaos of tree-shifts. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 369(12), 2017.

[2] Jung-Chao Ban and Chih-Hung Chang. Tree-shifts: the entropy of tree-shifts of finite type. *Nonlinearity*, 30(7), 2017.

[3] Andresssa Paola Cordeiro, Alexandre Tavares Baraviera, and Alex Jenaro Becker. Entropy for k-trees defined by k transition matrices. *Arxiv*, 2023.

[4] Karl Petersen and Ibrahim Salama. Tree shift topological entropy. *Theoret. Comput. Sci.*, (473), 2018.

Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul e ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada.