Semigrupos da classe de Gevrey para Equação da Viga Visco-elástica

Andrea Luiza G. Martinho & Jaime M. Rivera

UFRRJ, UFRJ

andrea@ufrrj.br

34° Coloquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 24-28 de julho de 2023.

1 Introdução

Neste trabalho estudaremos as propriedades regularizantes de sistemas de vigas quando a dissipação atuando em toda a viga. Até o momento praticamente os estudos de modelos similares foram feitos para analisar os casos de decaimento, à saber, decaimento exponencial e decaimento polinomial, ou mesmo a falta de decaimento. Veja por exemplo [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10]. Pensamos que o efeito regularizante, analiticidade ou mesmo a diferenciabilidade são temas que não tem sido estudados mesmo quando a dissipação seja total.

2 Modelo

Aqui consideramos o modelo de Euler Bernoulli com componente viscosa efetiva em todo material. Consideremos que a viga está configurada no intervalo $I=]0,\ell[$. O modelo que aqui estudamos é definido por

$$\rho\, u_{tt} + \alpha u_{xxxx} - \alpha_0 u_{txx} = 0, \text{ em } I\times\mathbb{R}_+ \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, \text{ em } \mathbb{R}_+ \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = u_1(x),\ u(x,0) = u_0(x), \text{ em } I, \tag{3}$$

onde ρ, α, α_0 são constantes positivas. Esse problema já foi estudado antes em [4], mas a regularidade e a dissipação aqui abordados são diferentes.

3 Energia e Espaço Fase

A energia associada ao modelo (1)-(3) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(\rho|u_t|^2 + \alpha|u_{xx}|^2\right)\, dx.$$

De onde temos

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_0^\ell \alpha_0|u_{xt}|^2\, dx.$$

Denotando por $u_t = v$. Definimos o espaço de fase $\mathcal{H}$ da seguinte forma

$$\mathcal{H} = H_0^2(0,\ell)\times L^2(0,\ell),$$

o qual é um espaço de Hilbert equipado com o produto interno

$$(U,U^*)_{\mathcal{H}} = \int_0^\ell \left(\rho v\overline{v^*} + \alpha u_{xx}\overline{u^*_{xx}}\right)dx,$$

onde $U=(u,v)$ e $U^*=(u^*,v^*)$. O operador $\mathcal{A}$, para $\rho=1$ é dado pela seguinte expressão

$$U = \begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix},\quad \mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v\\ -\alpha u_{xxxx} - \alpha v_{xx}.\end{pmatrix}$$

Portanto, o sistema (1)-(3) pode ser reescrito como

$$U_t - \mathcal{A}U = 0,\quad U(0) = U_0. \tag{4}$$

com domínio é dado por

$$D(\mathcal{A}) = H^4(0,\ell)\cap H_0^2(0,\ell)\times H_0^2(0,\ell)$$

Não é difícil ver que

$$\text{Re}\,\langle\mathcal{A}U,U\rangle_{\mathcal{H}} = -\int_0^\ell \alpha_0|v_x|^2 dx \le 0. \tag{5}$$

Tomemos $F=(f_1,f_2)^t\in\mathcal{H}$. Agora, observando que a equação do resolvente $(i\lambda I-\mathcal{A})^{-1}F = U$ é equivalente a $i\lambda U - \mathcal{A}U = F$, $\lambda\in\mathbb{R}$, temos que em termos das componentes pode ser escrito como

$$i\lambda u - v = f_1 \in H^2(0,\ell) \tag{6}$$

$$i\lambda\rho v + \alpha u_{xxxx} - \alpha_0 v_{xx} = \rho f_2 \in L^2(0,\ell), \tag{7}$$

satisfazendo (2) e (3). Agora, tomando o produto interno da equação do resolvente $i\lambda U - \mathcal{A}U = F$, $\lambda\in\mathbb{R}$ com U, e depois tomando a parte real e usando (5) temos que

$$\int_0^\ell \alpha_0|v_x|^2 dx = \text{Re}\,\langle F,U\rangle_{\mathcal{H}}, \tag{8}$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\int_0^\ell \alpha_0|v_x|^2 dx \le C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}, \tag{9}$$

onde $C>0$ é uma constante. Assim temos estimada a norma de v_x.

4 Existência e Unicidade

Teorema 1. ***Teorema 1*** *Para qualquer $U_0\in\mathcal{H}$ a solução U satisfaz $U\in C([0,T];\mathcal{H})$. Além disso, para cada $U_0\in D(\mathcal{A})$,*

$$U\in C^1([0,T];\mathcal{H})\cap C([0,T];D(\mathcal{A})).$$

Demonstração. Usa-se a Teoria de Semigrupos. □

5 Estabilidade Exponencial

A nossa principal ferramenta será a caracterização de Pruss [8], que estabelecemos a seguir

Teorema 2. *Seja $S(t)=e^{\mathcal{A}t}$ um semigrupo C_0 de contrações sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então $S(t)$ é exponencialmente estável, se e somente se,*

$$\varrho(\mathcal{A})\supset\{i\beta;\beta\in\mathbb{R}\}\qquad e \qquad \overline{\lim_{|\beta|\to\infty}}\|(i\beta I-\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}}<\infty.$$

Lema 1. *O domínio $D(\mathcal{A})$ tem imersão compacta no espaço de fase $\mathcal{H}$.*

O Lema 1 implica que o espectro de $\mathcal{A}$ é formado exclusivamente por autovalores. Isto porque resolvente é um operador compacto.

Lema 2. *Com as notações anteriores temos que $i\mathbb{R}\subset\varrho(\mathcal{A})$.*

Agora, considere

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1}{2}(\rho|v|^2+\alpha|u_{xx}|^2)(x) \quad\text{e}\quad \mathfrak{R} = \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \|F\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Finalmente,

Teorema 3. *O semigrupo definido pela equação* (1)-(3) *é exponencialmente estável.*

A principal desigualdade usada é

$$\int_0^\ell (\mathcal{I}(x) + \alpha|u_{xx}|dx \le C_\epsilon\mathfrak{R}.$$

6 Semigrupo de Gevrey

Definição 4 (Funções de Gevrey e Espaços das funções Gevrey)**.** *Sejam $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ um aberto e $s\ge 1$ um número real. O espaço das funções Gevrey, o qual será denotado por $G^s(\Omega)$, é o subespaço das funções $C^\infty(\Omega)$ tais que para cada compacto $K\subset\Omega$, existe uma constante $C=C(K)>0$ tal que*

$$|\partial^\alpha f(x)| \le C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s, \textit{para quaisquer}\alpha\in\mathbb{Z}_+^N.$$

Pela definição acima temos as seguintes observações:

- Se $s=1$ temos que $G^1(\Omega)=C^\omega(\Omega)$.
- Se $s_1<s_2$ então $G^{s_1}(\Omega)\subset G^{s_2}(\Omega)$.

Pelos itens da observação acima podemos concluir que

$$G^1(\Omega) = C^\omega(\Omega)\subset G^s(\Omega);\ s>1\ \subset C^\infty(\Omega).$$

Definição 5 (Semigrupo de Gevrey)**.** *Seja $\mathcal{A}$ gerador infinitesimal de um semigrupo C_0, $S(t)$ sobre um espaço de Banach X. Dizemos que $S(t)$ é de classe δ (com $\delta>1$) de Gevrey para $t>t_0$, se é infinitamente diferenciável para $t>t_0$ e, para cada conjunto compacto $K\subset(t_0,+\infty)$ e para todo $\theta>0$, existe uma constante $C=C(\theta,K)$, tal que*

$$\|S^n(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|\mathcal{A}^nS(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le C\theta^n(n!)^\delta,\quad \forall t\in K,\ n\ge 0.$$

A classe de Gevrey de um semigrupo possui propriedades mais forte que as propriedades regularizantes de um semigrupo diferenciável, mais é mais fraco que as de um semigrupo analítico. Seu efeito regularizante é instantâneo. Mais ainda sua ordem de regularidade é C^∞. Quando $\delta=1$, o semigrupo é analítico.

Teorema 6 (Condição necessária e suficiente para classificar a classe de Gevrey de um Semigrupo)**.** *Seja $\mathcal{A}$ gerador infinitesimal de um semigrupo C_0, $S(t)$ sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. $S(t)$ é de classe $\delta>1$ de Gevrey se e somente se para todo $b,\tau>0$, existem constantes $a\in\mathbb{R}$ e $C>0$ dependendo apenas de b,τ,δ tais que*

$$\rho(\mathcal{A})\supseteq\Sigma_b(\delta)\equiv\left\{\lambda\in\mathbb{C}\ \middle|\ Re\lambda > a - b|\text{Im}\,\lambda|^{\frac{1}{\delta}}\right\},$$

e

$$\|(i\lambda-\mathcal{A})^{-1}\| \le C\left(e^{-\tau Re\lambda}+1\right),\quad \forall\lambda\in\Sigma_b(\delta).$$

Contudo, se já tivermos informações do semigrupo não é preciso usarmos as condições necessárias basta as condições suficientes. Sendo assim se já temos a informação que o nosso semigrupo é C_0 podemos usar o seguinte resultado:

Teorema 7. *Seja $\mathcal{A}$ gerador infinitesimal de um semigrupo C_0, $S(t)$ sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Suponha $\alpha\ge\omega$ e δ satisfazendo $0<\delta\le 1$ e*

$$\limsup_{\lambda\in\mathbb{R},\,|\lambda|\to\infty} |\lambda|^\mu\|[(\alpha+i\lambda)I-\mathcal{A}]^{-1}\| < \infty. \tag{10}$$

Então $S(t)$ é de classe de Gervrey γ para $t>0$, para cada $\gamma>\frac{1}{\mu}$.

E se já temos a informação que o nosso semigrupo é C_0 de contrações podemos usar o resultado abaixo:

Teorema 8. *Seja $\mathcal{A}$ gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações, $S(t)$ sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Suponha $\alpha\ge\omega$ e δ satisfazendo $0<\delta\le 1$ e*

$$\limsup_{\lambda\in\mathbb{R},\,|\lambda|\to\infty} |\lambda|^\mu\|(i\lambda-\mathcal{A})^{-1}\| < \infty. \tag{11}$$

Então $S(t)$ é de classe de Gevrey γ para $t>0$, para cada $\gamma>\frac{1}{\mu}$.

Note que quando se verifica que

$$\limsup_{\lambda\in\mathbb{R},\,|\lambda|\to\infty} |\lambda|^\mu\|(i\lambda I-\mathcal{A})^{-1}\| = c < \infty.$$

e o $0\in\varrho(\mathcal{A})$ então o semigrupo é exponencialmente estável.

7 Resultados

Lema 3. *Sobre o intervalo $I=]0,\ell[$ temos*

$$\|v\|_{L^2} \le \frac{\epsilon}{|\lambda|^{1/2}}\|u_{xxx}\|_{L^2} + \frac{c_\epsilon}{|\lambda|^{1/2}}\mathfrak{R}^{1/2} \tag{12}$$

$$\tag{13}$$

Lema 4. *Sobre o intervalo $I=]0,\ell[$ temos que*

$$\int_0^\ell |u_{xxx}|^2\, dx \le c_\epsilon\mathfrak{R} \tag{14}$$

Teorema 9. *O semigrupo associado a* (1)-(3) *é da classe de Gevrey* 4.

A principal desigualdade usada aqui é

$$\int_0^\ell (\mathcal{I}(x)+\alpha|u_{xx}|dx \le \frac{C_\epsilon}{|\lambda|^{1/2}}\mathfrak{R}.$$

8 Conclusões

Neste trabalho mostramos que mecanismos dissipativos podem produzir regularidade das soluções. Isto é de singular importância não somente para fins teóricos mais para as correspondentes aplicações numéricas.

Referências

[1] ALVES, M.; RIVERA, J. M.; SEPÚLVEDA, M.; VILLAGRÁN, O. V. & GARAY, M. Z. *The asymptotic behavior of the linear transmission problem in viscoelasticity,* Math. Nachr., **287** (2014), No.5-6, pp. 483-497.

[2] CHEN, G.; FULLING, S. A.; NARCOWICH, F. J. & SUN, S. (1991), *Exponential decay of the energy of evolution equation with locally distributed damping*, SIAM J. Appl. Math. 51, pp. 266-301.

[3] CHEN, S.; LIU, K. & LIU,Z. *Spectrum and stability for elastic systems with global or local Kelvin-Voigt damping,* SIAM J. Appl. Math., **59** (1998), No.2, pp. 651-668.

[4] LIU, K. & LIU, Z. *Exponential decay of energy of the Euler-Bernoulli beam with locally distributed Kelvin-Voigt damping*, SIAM J. Control. Optim., **36** (1998), No.3, pp. 1086-1098.

[5] LIU, K. & LIU, Z. *Exponential decay of energy of vibrating strings with local viscoelasticity*, Z. Angew. Math. Phys., **53** (2002), No.2, pp. 265-280.

[6] LIU, K.; LIU, Z. & ZHANG, Q. *Eventual differentiability of wave equation with local Kelvin-Voigt damping*, ESAIM COCV, Volume 23, No.2 (2017), 443-454.

[7] LIU, K. & RAO, B. *Exponential stability for the wave equation with local Kelvin-Voigt damping,* Z. Angew. Math. Phys., **57** (2006), No.3, pp. 419-432.

[8] PRUSS, J. *On the spectrum of* C_0-semigroups, *Transactions of the American Mathematical Society Vol. 284, (2), pages 847- 857, (1984).*

[9] RENARDY, M. *On localized Kelvin-Voigt damping,* Z. Angew. Math. Mech, **84** (2004), No.4, pp. 280-283.

[10] TEBOU, L. *Stabilization of some elastodynamic systems with localized Kelvin-Voigt damping*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **36**(12), (2016), pp. 7117-7136.

Agradecimentos

Este trabalho faz parte da tese de doutorado e foi desenvolvido sobre orientação do Prof. Jaime M. Rivera