Graduações para a Álgebra $M_2(F)$

Ana Cristina Porto Silveira[1]
Lorena Mara Costa Oliveira[2]

Universidade Federal de São João del Rei - UFSJ

[1]acristinaps94@aluno.ufsj.edu.br
[2]lorena.oliveira@ufsj.edu.br

Introdução

Dada uma álgebra A e um corpo F de característica zero, classificaremos as C_3-graduações da álgebra $M_2(F)$, onde C_3 é o grupo cíclico de ordem 3.

Objetivos

A ênfase neste trabalho está em classificar as G-graduações presentes na álgebra $M_2(F)$, a álgebra de matrizes 2×2 sobre um corpo F, onde $G = C_3$ o grupo cíclico de ordem 3.

Definição

Uma álgebra A é graduada por um grupo G, ou simplesmente, A é uma álgebra G-graduada, se A pode ser escrita como a soma direta de espaços vetoriais $A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$, tais que $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$, para todos $g, h \in G$.

Exemplo 1:

Toda álgebra A possui uma G-graduação. De fato, basta considerar $A^{(1)} = A$ e $A^{(g)} = \{0\}$, para todo $g \in G - \{1\}$. Esta G-graduação é chamada G-graduação trivial.

Exemplo 2:

Sejam $A_1 = \bigoplus_{g\in G} A_1^{(g)}$ e $A_2 = \bigoplus_{g\in G} A_2^{(g)}$ álgebras G-graduadas. Considere $B = A_1 \oplus A_2$ e $B^{(g)} = A_1^{(g)} \oplus A_2^{(g)}$, para todo $g \in G$. Então $B = \bigoplus_{g\in G} B^{(g)}$ fornece uma G-graduação para a álgebra B. Tal procedimento pode ser estendido para uma quantidade arbitrária de álgebras G-graduadas.

Exemplo 3:

Seja $A = M_n(F)$ a álgebra de matrizes 2×2 sobre F. Fixe uma n-upla $\alpha = (g_1, ..., g_n) \in G^n$. Denotamos por e_{ij} as matrizes elementares usuais, para todos $1 \leq i, j \leq n$. Para cada $g \in G$, considere o seguinte subespaço de A:

$$A_2^{(g)} = \text{span}_F\{e_{ij} | g_i^{-1} g_j\} = g$$

É imediato que $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$, para todos $g, h \in G$. Assim, a decomposição $M_n(F) = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ é uma G-graduação para $M_n(F)$, chamada de graduação elementar induzida pela n-upla α. Vale ressaltar que podemos assumir $g_1 = 1$ em α.

Teorema

Sejam $A = M_2(F)$ uma matriz 2×2 sobre F da forma

$$M_2(F) = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}$$

e $C_3 = \langle g \rangle$, o grupo cíclico de ordem 3. Então, as C_3-graduações na álgebra A se dão da seguinte maneira:
i) C_3-graduação trivial;
ii) $A^{(1)} = \text{span}_F\{e_{11}, e_{22}\}$,
$A^{(g)} = \text{span}_F\{e_{12}\}$,
$A^{(g^2)} = \text{span}_F\{e_{21}\}$;
iii)$A^{(1)} = \text{span}_F\{e_{11}, e_{22}\}$,
$A^{(g)} = \text{span}_F\{e_{21}\}$,
$A^{(g^2)} = \text{span}_F\{e_{12}\}$.

Demonstração:

Considere que $A = Fe_{11} \oplus Fe_{21} \oplus Fe_{12} \oplus Fe_{22}$ seja uma álgebra C_3-graduada. Suponha que $e_{11} \in A^{(g)}$ para $g \in G$. Como A é uma álgebra G-graduada, então $e_{11} \cdot e_{11} \in A^{(g^2)}$. Por outro lado, $e_{11} \cdot e_{11} = e_{11} \in A^{(g)}$. Portanto, $g \in 1$. Analogamente, temos que $e_{22} \in A^{(1)}$.

1º caso: $\dim_F(A^{(1)}) = 2$.

- $A^{(1)} = \text{span}_F\{e_{11}, e_{22}\}$, $A^{(g)} = \text{span}_F\{e_{12}, e_{21}\}$, $A^{(g^2)} = \{\emptyset\}$. Note que $e_{12} \cdot e_{21} = e_{11} \in A^{(1)}$. Por outro lado, $e_{12} \cdot e_{21} = e_{11} \in A^{(g^2)}$, o que é um absurdo, pois A é C_3-graduada.
- Analogamente, para $A^{(1)} = \text{span}_F\{e_{11}, e_{22}\}$, $A^{(g)} = \{\emptyset\}$, $A^{(g^2)} = \text{span}_F\{e_{12}, e_{21}\}$, note que $e_{12} \cdot e_{21} = e_{11} \in A^{(1)}$. Por outro lado, $e_{12} \cdot e_{21} = e_{11} \in A^{(g)}$, o que é um absurdo, pois A é C_3-graduada.
- $A^{(1)} = \text{span}_F\{e_{11}, e_{22}\}$, $A^{(g)} = \text{span}_F\{e_{12}\}$, $A^{(g^2)} = \text{span}_F\{e_{21}\}$
  $e_{11} \cdot e_{12} = e_{12} \in A^{(g)}$
  $e_{12} \cdot e_{11} = \{\emptyset\} \in A^{(g)}$
  $e_{11} \cdot e_{21} = \{\emptyset\} \in A^{(g^2)}$
  $e_{21} \cdot e_{11} = e_{21} \in A^{(g^2)}$
  $e_{22} \cdot e_{12} = \{\emptyset\} \in A^{(g)}$
  $e_{12} \cdot e_{22} = e_{12} \in A^{(g)}$
  $e_{22} \cdot e_{21} = e_{21} \in A^{(g^2)}$
  $e_{21} \cdot e_{22} = \{\emptyset\} \in A^{(g^2)}$
  $e_{12} \cdot e_{21} = e_{11} \in A^{(1)}$
  $e_{21} \cdot e_{12} = e_{22} \in A^{(1)}$
  Portanto $A^{(g)} = \text{span}_F\{e_{12}\}$ e $A^{(g^2)} = \text{span}_F\{e_{21}\}$
- Analogamente, para $A^{(1)} = \text{span}_F\{e_{11}, e_{22}\}$, $A^{(g)} = \text{span}_F\{e_{21}\}$, $A^{(g^2)} = \text{span}_F\{e_{12}\}$.

2º caso: $\dim_F(A^{(1)}) = 3$.

- $A^{(1)} = \text{span}_F\{e_{11}, e_{12}, e_{22}\}$, $A^{(g)} = \text{span}_F\{e_{21}\}$, $A^{(g^2)} = \{\emptyset\}$. Note que $e_{12} \cdot e_{21} = e_{11} \in A^{(1)}$. Por outro lado, $e_{12} \cdot e_{21} = e_{11} \in A^{(g)}$, o que é um absurdo, pois A é C_3-graduada.
- Analogamente, para $A^{(1)} = \text{span}_F\{e_{11}, e_{12}, e_{22}\}$, $A^{(g)} = \text{span}_F\{e_{12}\}$, $A^{(g^2)} = \{\emptyset\}$, temos que $e_{21} \cdot e_{12} = e_{22} \in A^{(1)}$. Por outro lado, $e_{21} \cdot e_{12} = e_{22} \in A^{(g)}$, o que é um absurdo, pois A é C_3-graduada.
- $A^{(1)} = \text{span}_F\{e_{11}, e_{12}, e_{22}\}$, $A^{(g)} = \{\emptyset\}$, $A^{(g^2)} = \text{span}_F\{e_{21}\}$. Note que $e_{12} \cdot e_{21} = e_{11} \in A^{(1)}$. Por outro lado, $e_{12} \cdot e_{21} = e_{11} \in A^{(g^2)}$, o que é um absurdo, pois A é C_3-graduada.
- Analogamente, para $A^{(1)} = \text{span}_F\{e_{11}, e_{21}, e_{22}\}$, $A^{(g)} = \{\emptyset\}$, $A^{(g^2)} = \text{span}_F\{e_{12}\}$, temos que $e_{12} \cdot e_{21} = e_{11} \in A^{(1)}$. Por outro lado, $e_{12} \cdot e_{21} = e_{11} \in A^{(g^2)}$, o que é um absurdo, pois A é C_3-graduada.

Conclusão

Neste trabalho, estudamos todas as possibilidades para as C_3-graduações de uma matriz $M_2(F)$. Constatamos haver três C_3-graduações distintas.

Referências

[1] OLIVEIRA, LORENA. Variedades de álgebras G-graduadas com involução graduada de crescimento quase polinomial. Impa, 2022.

Agradecimentos

Agradecemos à UFSJ, em especial ao DEMAT - Departamento de Matemática e Estatística, e ao fomento recebido.