Contagem de Estruturas em Combinatória Aditiva

Afonso Sant'Anna & Roberto Parente

Universidade de São Paulo

afonso.lima@ime.usp.br
roberto.parente@ufba.br

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

A combinatória aditiva é a teoria da contagem de estruturas aditivas em conjuntos. Esta teoria tem visto grandes desenvolvimentos e mudanças dramáticas de direção nos últimos anos, graças às suas conexões com áreas como Teoria dos Números, Teoria Ergódica e Teoria dos Grafos. Tem como objeto de estudo, normalmente, conjuntos aditivos em grupos abelianos. Os principais resultados estudados foram realizando contagens de progressões aritméticas em grupos abelianos e estudando resultados famosos como Meshulam, Roth e Szemerédi a partir da ótica da Combinatória e da Análise de Fourier.

Introdução

Definição 0.1 (Caracteres em Grupos Abelianos)**.** *Seja G um grupo aditivo finito abeliano. Um caractere em G é um homomorfismo $\chi : G \mapsto \mathbb{C}^*$, onde $\mathbb{C}^*$ é o grupo multiplicativo complexo.*

Vamos utilizar a notação de esperança para realizar a contagem da média das somas dos caracteres, logo

$$\mathbb{E}_{x\in G}[f(x)] = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} f(x).$$

Definição 0.2. *Definimos o produto interno dos caracteres como $\langle \chi_1, \chi_2\rangle = \mathbb{E}_{x\in G}\, \chi_1(x)\overline{\chi_2(x)}$.*

Definição 0.3 (Caracteres em $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$)**.** *Seja $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, e dado $r \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ vamos definir o caractere χ com relação a r como*

$$\chi_r(x) = e^{2\pi i r x/N}$$

.

Definição 0.4 (Transformada de Fourier)**.** *Seja $f : G \mapsto \mathbb{C}$. A Transformada de Fourier de f é a função $\hat{f} : \hat{G} \mapsto \mathbb{C}$ definido pela formula $\hat{f}(\chi) = \mathbb{E}_{x\in G}\, f(x)\overline{\chi(x)} = \langle f, \chi\rangle$.*

Definição 0.5. *Uma 3-PA em um grupo abeliano é um conjunto da forma $\{x, x+d, x+2d\}$. É não degenerada se todos os três termos forem distintos. Alternativamente, em um conjunto x, y, z, onde $y = (x+z)/2$, ou $2y = x + z$.*

Definição 0.6. *A Densidade Superior de Banach é definida pela quantidade*

$$\overline{BD}(A) = \lim_{N\mapsto\infty}\sup\,\sup_{h\in\mathbb{Z}} \frac{|A\cap(h+[N])|}{N}$$

Definição 0.7. *Uma progressão aritmética de comprimento K, ou K-PA, é a K-tupla P da forma*

$$P = a + r[K] = (a + kr)_{k\in[K]}$$

Resultados Preliminares

Lema 0.8. *Seja G um grupo finito abeliano de ordem ímpar e sejam $f, g, h : G \mapsto \mathbb{C}$. Então*

$$\mathbb{E}_{x+z=2y}[f(x)g(y)h(z)] = \sum_{\chi}[\hat{f}(\chi)\hat{g}(\chi^{-2})\hat{h}(\chi)]$$

Corolário 0.9. *Seja G um grupo finito abeliano de ordem ímpar e sejam $A, B, C \subset G$ conjuntos de densidades α, β, γ, respectivamente. Seja o $\max_{\chi\neq\chi_0}|\hat{A}(\chi)| \leq \eta$. Então*

$$\mathbb{E}_{x+z=2y}[A(x)B(y)C(z)] \geq \alpha\beta\gamma - \eta\beta^{1/2}\gamma^{1/2}$$

Corolário 0.10. *Seja G um grupo finito abeliano de ordem ímpar e sejam $A, B, C \subset G$ conjuntos com densidades α, β, γ, respectivamente. Suponhamos que $\alpha\beta\gamma/2 \geq |G|^{-1}$, se não existe uma $3-$PA não degenerada em $A\times B\times C$, então existe $\chi \neq \chi_0$ tal que $|\hat{A}(\chi)| \geq \alpha\beta^{1/2}\gamma^{1/2}/2$.*

Lema 0.11. *Para todo $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$, $\forall\epsilon > 0$ e $\forall n$. podemos particionar $[n]$ em progressões aritméticas $P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_m$ tais que $|P_i| \geq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{8\pi}$ e $diam\{z^k : k \in P_i\} \leq \epsilon$ para todo $i \in [m]$.*

Corolário 0.12. *Seja $A \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ com densidade α. Suponhamos que existe $r \neq 0$ tal que $|\hat{A}(\chi_r)| \geq \delta$. Então existe uma progressão aritmética $P \subset [n]$ tal que, considerando P como subconjunto de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, $\frac{|A\cap P|}{|P|} \geq \alpha + \frac{\delta}{4}$ e $|P| \geq \frac{\delta\sqrt{n}}{8\pi}$.*

Resultados Principais

Teorema 0.13 (Meshulam-1995)**.** *Para todo $\alpha > 0$, existe n tal que se $A \subset \mathbb{F}_3^n$ e $|A| \geq \alpha 3^n$, então A contém x, y, z, não todos iguais, tais que $x + z = 2y$.*

Teorema 0.14 (Roth-1953)**.** *$\exists N_0$ tal que $\forall N \geq N_0$, se $A \subset [N]$, com $|A| \geq \frac{cN}{\log(\log(N))}$, então A possui uma 3-PA, para alguma constante $c > 0$.*

Teorema 0.15 (Varnavides)**.** *Para todo $\epsilon > 0$, existe $C(\alpha) > 0$ tal que se $A \subset [N]$ com $|A| \geq \alpha N$, então A contém pelo menos $C(\alpha)N^2$ progressões aritméticas de tamanho 3.*

As provas do Teorema de Meshulam e Roth utilizando a Análise de Fourier usam uma estratégia chamada incremento de densidade. A estratégia consiste em buscar de progressões aritméticas através de conjuntos aumentando a sua densidade tanto quanto seja possível. O Teorema de Varnavides é um pouco mais forte que o Teorema de Roth, pois realiza uma contagem explícita do número de progressões aritméticas de tamanho 3 dentro do conjunto em questão.

Teorema 0.16 (Szemerédi-1975)**.** *Seja $A \subset \mathbb{N}$ com densidade superior positiva de Banach. Então A contém uma $K - PA$ para todo $K \in \mathbb{N}$.*

Teorema 0.17 (Ellenberg-Gijswijt-2017)**.** *Sejam α, β e γ elementos de $\mathbb{F}_q$, não todos zero, tais que $\alpha + \beta + \gamma = 0$, e seja A um subconjunto de $\mathbb{F}_q^n$ tal que a equação*

$$\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 0$$

não têm soluções $(a_1, a_2, a_3) \in A^3$ além daquelas com $a_1 = a_2 = a_3$. Seja m_d o número de monômios em $x_1, ..., x_n$ com grau total no máximo d e em que cada variável aparece com grau no máximo $q - 1$.

Então $|A| \leq 3m_{(q-1)n/3}$, onde $m_{(q-1)n/3} = O(c^n)$ para algum $c < q$.

Corolário 0.18. *Seja A subconjunto de $\mathbb{F}_3^n$ que não possui progressões aritméticas de tamanho 3. Então $|A| = o(2,756^n)$.*

Referências

[1] Tao, T. E. R. E. N. C. E. (2020). Szemerédi's proof of Szemerédi's theorem. Acta Mathematica Hungarica, 161(2), 443-487.

[2] Meshulam, R. (1995). On subsets of finite abelian groups with no 3-term arithmetic progressions. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 71(1), 168-172.

[3] Roth, K. F. (1953). On certain sets of integers. J. London Math. Soc, 28(104-109), 3.

[4] Ellenberg, J. S., & Gijswijt, D. (2017). On large subsets of with no three-term arithmetic progression. Annals of Mathematics, 339-343.