O Teorema da Função Implícita para Funções de um Valor Real

Adriano da Silva Castro & Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos (Orientador)

Universidade Federal do Pará / Faculdade de Matemática

adriano.castro@icen.ufpa.br, cgelson@ymail.com

impa

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Introdução

O Teorema da Função Implícita (T.F.I.) é um dos mais importantes resultados envolvendo funções de várias variáveis. Este teorema estabelece condições que permitem encontrar soluções da equação $f(x, y) = 0$. Além disso, ele permite definir y em função de x ou x em função de y, e obter a derivada parcial da função implícita em função das derivadas parciais da função $f(x, y)$.

A Descoberta do T.F.I. costuma ser atribuída a Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Vale ressaltar que este é um dos matemáticos que mais contribuiu para o rigor matemático na Análise Matemática.

O T.F.I. afirma que, se em um ponto do conjunto solução da equação $f(x, y) = 0$ a derivada parcial em relação a y não se anula, esta equação define y em função de x (a saber $y = \xi(x)$), além disso, obtemos informações a respeito a derivada parcial desta função ξ.

Vamos considerar o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e seus pontos (x, y) onde $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$.

Teorema da Função Implícita

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k com $k \geq 1$, U um conjunto aberto e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $f(x_0, y_0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Então, existem uma bola $B = B(x_0; \delta) \subset \mathbb{R}^n$ e um intervalo $J = (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon) \subset \mathbb{R}$ tais que

I) $B \times \bar{J} \subset U$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in B \times \bar{J}$;

II) Para todo $x \in B$ existe um único $y = \xi(x) \in J$ tal que $f(x, y) = f(x, \xi(x)) = 0$. Além disso, $\xi : B \to J$ é uma função de classe C^k, dada implicitamente, que tem derivadas parciais em cada $x \in B$ dadas por

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}.$$

Prova:

I) Vamos supor $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$. Pela continuidade de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, existem $\delta > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que, tomando $B = B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ e $J = (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon) \subset \mathbb{R}$, obtemos $B \times \bar{J} \subset U$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in B \times \bar{J}$, o que prova o item a). o caso $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) < 0$ é análogo.

II) **Existência e Unicidade de $\xi(x)$:** Pelo item I), para todo $x \in B$, a função $y \mapsto f(x, y)$ é crescente no intervalo $\bar{J}$. Como $f(x_0, y_0) = 0$, segue que $f(x_0, y_0 - \epsilon) < 0 < f(x_0, y_0 + \epsilon)$.

Assim, sendo f contínua, podemos supor δ tão pequeno que $f(x, y_0 - \epsilon) < 0 < f(x, y_0 + \epsilon)$, para todo $x \in B$.

Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, para cada $x \in B$, deve existir um único $y = \xi(x) \in \bar{J}$ tal que $f(x, y) = 0$. Temos $y \in J$, pois como f é contínua e crescente, ocorre $f(x, y_0 - \epsilon) < 0 < f(x, y_0 + \epsilon)$, o que implica $\Rightarrow y_0 - \epsilon < y < y_0 + \epsilon$, fornecendo $y \in J$.

Continuidade de $\xi(x)$: Sejam $F \subset \bar{J}$ um conjunto fechado e $(x_k) \subset B$ uma sequência tal que $\xi(x_k) \subset F$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\lim x_k = \bar{x} \in B$, então $\xi(\bar{x}) \in F$. Mas F é compacto, então (x_k) é limitada e, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, possui uma subsequência $(x'_k) \subset B$ convergente, tal que $\lim \xi(x'_k) = a \in B$.

Logo, pela continuidade de f, temos $f(\bar{x}, a) = \lim f(x'_k, \xi(x'_k)) = 0$ mas como $f(\bar{x}, \xi(\bar{x})) = 0$, segue pela unicidade de ξ que $\xi(\bar{x}) = a \in F$.

Portanto, provamos que para todo conjunto fechado $F \subset \bar{J}$, a imagem inversa $\xi^{-1}(F)$ é fechada em B. Assim, ξ é contínua.

Derivadas Parciais de $\xi(x)$: Tomemos

$$k = k(t) = \xi(x + te_i) - \xi(x),$$

então $\xi(x + te_i) = \xi(x) + k$ logo,

$$f(x+te_i, \xi(x+te_i)) = f(x+te_i, \xi(x)+k) = f(x, \xi(x)) = 0.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, para todo t existe $\theta = \theta(t) \in (0, 1)$ tal que

$$f(x + te_i, \xi(x) + k) - f(x, \xi(x)) = 0,$$

assim

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta te_i, \xi(x)+\theta k) \cdot t + \frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta te_i, \xi(x)+\theta k) \cdot k = 0,$$

onde

$$k = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta te_i, \xi(x) + \theta k)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta te_i, \xi(x) + \theta k)} \cdot t.$$

Então, lembrando que $k = \xi(x + te_i) - \xi(x)$ e dividindo a expressão por t, obtemos

$$\frac{\xi(x + te_i) - \xi(x)}{t} = \frac{k}{t} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta te_i, \xi(x) + \theta k)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta te_i, \xi(x) + \theta k)}.$$

Como ξ é contínua, obtemos $\lim_{t \to 0} k(t) = 0$. A continuidade das derivadas parciais de f mostra que as derivadas parciais de ξ em todo $x \in B$ são dadas por,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\xi(x + te_i) - \xi(x)}{t} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))},$$

para $1 \leq i \leq n$.

Essa expressão mostra que se f é de classe C^k, então as derivadas parciais de ξ são de classe C^{k-1} e portanto, ξ é de classe C^k.

□

Pelo teorema demonstrado, se tomarmos a inversa de f e o conjunto $B \times J$ obtemos que

$$f^{-1}(0) \cap B \times J = \{(x, \xi(x) \in \mathbb{R}^{n+1}); x \in B\},$$

ou seja, a intersecção entre a inversa de f no ponto 0 e o produto $B \times J$ é o gráfico de ξ.

Referências

[1] LIMA, Elon Lages. **Análise Real Vol.2, Funções de N Variáveis**. 6.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[2] JÚNIOR, Jenival Vieira. **O Teorema da Função Implícita**. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso, UFAL, Arapiraca, 2013.

[3] AMORIM, Cláudia Rabelo Oliveira. **Teorema da Função Implícita e suas Aplicações**. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso, UFMG, Belo Horizonte, 2016.

Agradecimentos

A PROEX-UFPA, ao 34°CBM e principalmente ao meu orientador Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos pela paciência, dedicação e orientação.