Polinômio central, uma contrução por Razmyslov

Adison Silva

Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística

adison@usp.br

Resumo

A existência de um polinômio p na álgebra livre de polinômios com variáveis associativas não nulo tal que avaliado no anel associativo de matrizes de ordem n, está no centro da álgebra sem ser identidade polinomial, foi um desafio lançado em 1956 por Kaplansky, reelaborado em 1970 de modo a eliminar os caso triviais. O chamado polinômio central, teve sua existência demonstrada entre 1972 e 1973, paralelamente pelos matemáticos Formanek e Razmyslov. Vamos nos concentrar no de Razmyslov.

Introdução

Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $M_n(\mathbb{K})$ anel associativo de matrizes de ordem n em $\mathbb{K}$. Para X enumerável, $\mathbb{K}\langle X\rangle$ simboliza a álgebra livre dos polinômios com variáveis associativas gerada por X.

Definição 1 (Polinômio central)**.** Seja R um álgebra sobre um corpo $\mathbb{K}$. O polinômio $c(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{K}\langle X\rangle$ é chamado de polinômio central se satisfaz
(i) $c(0)=0$ (termo constante igual a 0).
(ii) $c(r_1,\ldots,r_m)\in Z(R),\ \forall r_1,\ldots,r_m\in R$.
(iii) $c(x_1,\ldots,x_m)\notin Id(R)$.

Exemplo 1 (Wagner-Hall)**.** Para $n=2$, sendo $[x_1,x_2]=x_1x_2-x_2x_1$ temos

$$c(x_1,x_2)=[x_1,x_2]^2$$

central para $M_2(\mathbb{K})$.

Exemplo 2. $c(x_1,x_2)=[x_1,x_2]$ é central para a álgebra de Grassmann.

Os polinômios centrais têm aplicações na teoria de álgebras com identidades polinomiais, na teoria combinatória álgebras com identidades polinomiais e na teoria de imagem de polinômios.

Objetivos

1. Apresentar o conceito e alguns exemplos de polinômios centrais para $\mathbb{K}-$álgebras.
2. Apresentar o polinômio central para $M_n(\mathbb{K})$ de Razmyslov e sua construção.

Resultados

Consideremos $sl_n(\mathbb{K})$ o subconjunto de $M_n(\mathbb{K})$ dos elementos com traço nulo (subálgebra de $M_n(\mathbb{K})^{(-)}$).

Definição 2 (Identidade fraca e fraca essencial)**.** O polinômio $f(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{K}\langle X\rangle$ é chamado de identidade polinomial fraca para $M_n(\mathbb{K})$ se $f=0$ para $sl_n(\mathbb{K})$. f é identidade fraca essencial se $f=0$ para $sl_n(\mathbb{K})$ e $f\neq 0$ para $M_n(\mathbb{K})$.

Exemplo 3. $f(x_1,x_2)=[x_1^2,x_2]$ é identidade polinomial fraca essencial para $M_2(\mathbb{K})$.

Exemplo 4. O polinômio de Capelli

$$d_{n^2}(x_1,\ldots,x_{n^2},y_1,\ldots,y_{n^2+1}),$$

antissimétrico em n^2 variáveis é uma identidade polinomial fraca essencial para $M_n(\mathbb{K})$.

Definição 3 (Transformação de Razmyslov)**.** Consideremos $f(x,y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{K}\langle x,y_1,\ldots,y_m\rangle$ linear em x. Escrevendo $f=\sum_{i=1}^k g_ixh_i$, onde $g_i,h_i\in\mathbb{K}\langle y_1,\ldots,y_n\rangle$, a transformação de Razmyslov de f é o polinômio

$$f^*(x,y_1,\ldots,y_n)=\sum_{i=1}^k h_ixg_i.$$

Proposição 1. *Sejam* $a_i,\ b_i\in M_n(\mathbb{K}),\ i=1,\ldots,m$, *tais que*

$$f(u)=\sum_{i=1}^m a_iub_i=0,$$

para todo $u\in M_n(\mathbb{K})$, *então* $f^*(u)=0$.

Proposição 2. *Qualquer matriz com traço igual a zero de* $M_n(\mathbb{K})$ *é combinação linear de comutadores.*

Lema 3 (Lema de Razmyslov)**.** *Seja o polinômio* $f(x,y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{K}\langle x,y_1,\ldots,y_m\rangle$ *homogêneo de grau* 1 *na primeira variável* x *e seja* f^* *o polinômio obtido pela transformação de Razmyslov. Então*

(i) $f(x,y_1,\ldots,y_m)$ *é uma identidade polinomial para a álgebra de matrizes* $M_n(\mathbb{K})$ *se, e somente se,* $f^*(x,y_1,\ldots,y_m)$ *é também uma identidade polinomial.*

(ii) $f^*(x,y_1,\ldots,y_m)$ *é um polinômio central para a álgebra* $M_n(\mathbb{K})$ *se, e somente se,* $f(x,y_1,\ldots,y_m)$ *é uma identidade polinomial fraca essencial para a álgebra* $M_n(\mathbb{K})$ *e* $f([x,y_0],y_1,\ldots,y_m)$ *é uma identidade polinomial para* $M_n(\mathbb{K})$.

Teorema 4 (Razmyslov)**.** *Consideremos*

$$\begin{aligned} f &= f(x,z_1,\ldots,z_{2n^2-2},y_1,\ldots,y_{n^2-1})\\ &= d_{n^2}(x,[z_1,z_2],\ldots,[z_{2n-3},z_{2n^2-2}],1,y_1,\ldots,y_{n^2-1},1)\end{aligned}$$

onde $d_l(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{l+1})$ *é o polinômio de Capelli com* l *variáveis antissimétricas. A transformação de Razmyslov aplicada à* f *é um polinômio central multilinear para* $M_n(\mathbb{K})$ *sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *qualquer.*

Conclusão

O problema lançado por Kaplansky em 1956 tem resposta positiva demonstrada por Razmyslov. O polinômio central de Razmyslov é multilinear.

Referências

[1] M. Zaicev A. Giambruno. *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, volume 122. AMS, 2005.

[2] V. Drensky. *Free Algebras and PI-Algebras, Graduate Course in Algebra.* Springer-Verlag, 2000.

[3] I. Kaplansky. *Problems in the Theory of Rings Revisited*, volume 77. JSTOR, 1970.

Agradecimentos

Agradecer ao meu orientador Prof. Dr. Felipe Yukihide Yasumura, pelo apoio e incentivo pelo trabalho durante sua disciplina de tópicos em teoria de anéis. Ao IME-USP pelo apoio institucional e financeiro.