

**Modelagem do Spread entre o Título
Publico Brasileiro LTN e seu Derivativo
Equivalente DI Futuro de 1 dia**

Autor: Stefano D'Auria Politi

Orientador: Alfredo Noel Iusem

Coorientador: Fernando Antonio Lucena Aiube

Rio de Janeiro

Agosto / 2022

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar aos meus pais, Rosanna e Ubaldo, que me ensinaram desde cedo, cada um de sua maneira, a importância da educação acadêmica e o poder de transformação que esta apresenta na vida de qualquer indivíduo. Agradeço também, em especial, a Marina Thury, cujos sábios conselhos oferecidos se mostraram indispensáveis ao longo do caminho. Sem o carinho e a força de vocês três, eu nunca teria chegado no final do curso.

Agradeço ao professor Fernando Antonio de Lucena Aiube por todo o tempo, paciência e didática oferecidos ao longo de todas as etapas do desenvolvimento deste estudo. Agradeço ainda aos professores Alfredo Iusem, Edison Tito, Vinícius Albani e Milton Jara.

Agradeço também ao Flavio Fucs, chefe, mentor e amigo, por sempre me deixar claro que este mestrado era um desafio que eu não estava encarando sozinho. Obrigado sempre pela orientação, pelos conselhos e por toda a compreensão demonstrada ao longo do desenvolvimento do curso.

Por fim, agradeço a todos os amigos feitos ao longo dessa jornada. Em especial, ao amigo Lucas Geraldês, grande gestor e matemático. Tenho certeza que todas as parcerias desenvolvidas nesses últimos anos aumentam significativamente a probabilidade de uma carreira de sucesso.

Resumo

Neste estudo analisamos a relação entre os títulos públicos pré-fixados brasileiros do tipo bullet, denominados Letra do Tesouro Nacional (LTN), com os derivativos, negociados em bolsa brasileira BMF, do tipo Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (ou DI de 1 dia). Comparamos a diferença entre as taxas de remuneração pagas pelos títulos LTN e pelo derivativo futuro de DI de 1 dia de mesmo vencimento. Denominamos essa diferença de taxas como prêmio, e a modelamos como um processo de Ornstein-Uhlenbeck de reversão a média. Faremos uma análise teórica por trás da formulação de preço de ambos os instrumentos e argumentamos o porquê que este prêmio deveria normalmente tender a zero (sua média de longo prazo). Definimos então a estratégia de negociação destes instrumentos casados, onde isentamos a posição de risco direcional de taxa pré-fixada e operamos apenas este prêmio entres os instrumentos. Por fim, analisamos os resultados a serem obtidos pelas estratégias utilizando tanto a série histórica de preços quanto a modelagem do processo de Ornstein-Uhlenbeck.

Palavras-chave: LTN, Títulos Pré-fixados, Futuro de DI 1 dia, Processo de Ornstein-Uhlenbeck

Abstract

In this study, we analyze the relationship between Brazilian pre-fixed government bonds of the bullet type, called Letra do Tesouro Nacional (LTN), with derivatives, traded on the Brazilian futures exchange BMF, of the type Futures of Average One-Day Interbank Deposits (or 1-day DI). We compared the difference between the yield rates for LTN bonds and for the 1-day DI futures derivative with the same maturity. We term this difference between yields as premium, and model it as an Ornstein-Uhlenbeck mean-reverting process. We will do a theoretical analysis behind the pricing formulation of both instruments and argue why this premium should normally turn to zero (it's long-run average). We then define a trading strategy for these matched instruments, where we exempt the pre-fixed directional rate risk position and operate only this premium between the instruments. Finally, we analyze the results of the strategies by using both the historical price series and the modeling of the Ornstein-Uhlenbeck process.

Key-words: LTN, Pre-fixed bonds, 1 day DI Future, Ornstein-Uhlenbeck Process

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Revisão Bibliográfica	3
2	Os Instrumentos Financeiros	5
2.1	Letras do Tesouro Nacional (LTN)	5
2.2	Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (DI1)	7
2.3	Futuro de DI1 e LTN - O “Instrumento Casado”	9
3	Modelo Ornstein–Uhlenbeck	12
3.1	O Modelo Genérico	12
3.2	A Estimação dos Parâmetros do Modelo Ornstein–Uhlenbeck	14
3.3	Modelo Ornstein–Uhlenbeck aplicado ao preço do Casado	15
3.4	Possíveis Geradores da Volatilidade no Modelo	18
4	Resultado da Modelagem	21
4.1	Descrição da série de dados analisada	21
4.2	Estimação dos Parâmetros do Modelo	24
4.3	Avaliação do Modelo	26
5	Possibilidades de Estratégias	28
5.1	Analisando as Simulações	28
5.2	Descrição da Estratégia	31
5.3	Análise das Estratégias Contra as Simulações	32
5.4	Análise das Estratégias Contra a Série Histórica	37
6	Conclusões	40
	Referências Bibliográficas	42
A	Solução da EDE do Processo de Ornstein-Uhlenbeck	44

Capítulo 1

Introdução

O Tesouro Nacional Brasileiro foi criado no dia 10 de março de 1986. Sua criação representou um passo fundamental para o fortalecimento das finanças públicas do país, consolidando a modernização institucional e a sistematização da gestão responsável dos recursos públicos. No ano de 2002, foi lançado então o Programa Tesouro Direto. Com o objetivo de democratizar o acesso aos títulos públicos, o programa possibilita qualquer cidadão que possua um CPF investir em títulos do Tesouro Nacional. Desde então, o programa vem se popularizando cada vez mais e se tornando uma das ferramentas principais de investimento em renda fixa no mercado financeiro brasileiro.

O Tesouro Nacional oferece títulos com diferentes tipos de rentabilidade (prefixada, ligada à variação da inflação ou da taxa de juros básica da economia - Selic), diferentes prazos de vencimento e também diferentes fluxos de remuneração. Seus títulos são acessíveis aos investidores brasileiros, representam diversas opções diferentes de investimentos, oferecem boa liquidez, e são tidos como os investimentos de menor risco de crédito no mercado brasileiro.

Os Títulos são garantidos pelo Tesouro Nacional, todas as aplicações, resgates e acompanhamento dos investimentos são feitos através de portais on-line e aplicações e resgates podem ser feitos a preços de mercado, a qualquer momento.

Os Títulos do Tesouro Nacional disponíveis para investimento são:

Título	Remuneração	Prazo	Cupom
LTN	Pré-fixado	Curto a Médio	Bullet
NTN-F	Pré-fixado	Longo	10% a.a.
NTN-B	Pré-fixado em Juros Reais Indexado ao IPCA (inflação)	Curto a Longo	6% a.a.
LFT	Pós-Fixado indexado à taxa SELIC	Curto a Médio	Bullet

Tabela 1.1: Títulos do Tesouro Nacional

Para o nosso estudo, focarei no título pré-fixado, de curto a médio prazo, bullet, denominado LTN. A Letra do Tesouro Nacional (LTN) tenta simular um empréstimo, feito pelo investidor para o Tesouro Nacional, no qual o Tesouro se compromete a pagar, na data de vencimento acordada, o valor de face do título ao investidor.

O outro tipo de instrumento financeiro que também será abordado neste artigo são os derivativos, mais especificamente, os contratos Futuros.

Os contratos futuros são contratos de compra e venda padronizados, notadamente no que se refere às características do produto negociado, conforme regulamentação da Bolsa B3. Através desses contratos, as partes compradora e vendedora se comprometem a comprar e vender determinada quantidade de um ativo financeiro ou ativo “real” (bens tangíveis), em uma data futura, a um preço predeterminado. Por serem padronizados, os contratos futuros são negociáveis em bolsa. Mais especificamente, neste estudo estaremos analisando o contrato Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia, ou Futuro de DI1.

O Contrato Futuro de DI1 tem como ativo subjacente a taxa média diária dos Depósitos Interfinanceiros (DI), calculada e divulgada pela B3, compreendida entre a data de negociação, inclusive, e a data de vencimento, exclusive, e é utilizado para proteção e gerenciamento de risco de taxa de juros de ativos/passivos referenciados em DI. A taxa DI é uma forma de demonstrar os juros pagos por bancos quando fazem empréstimos entre si diariamente, e serve como parâmetro para todas as negociações do mercado financeiro. É tida como uma boa referência para a taxa livre de risco no Brasil.

O contrato tem valor nominal de R\$100.000,00 na data de vencimento, e o valor na data de negociação (PU) é igual ao valor de R\$100.000,00 descontado pela taxa

negociada. Como a posição é atualizada diariamente pela Taxa DI através da dinâmica de atualização do PU pelo fator de correção, o investidor que carrega a posição até o vencimento recebe ajustes diários que somados equivalerão à diferença entre a taxa de juros contratada e a realizada, sobre o montante financeiro da operação.

Em outras palavras, o contrato de Futuro de DI1 representa um swap, ou seja, uma troca de remuneração onde o investidor em uma ponta pagará uma taxa pré-fixada acordada no momento da negociação e receberá a taxa de DI de um dia efetiva acumulada no período desde a negociação até o encerramento da posição. O investidor na outra ponta pagará a taxa de DI efetiva e receberá a taxa pré-fixada acordada no momento da negociação.

Dessa forma, mostraremos nesse estudo que o instrumento derivativo Futuro de DI1 acaba replicando de forma exata uma operação de compra de LTN onde o investidor toma emprestado o capital para realizar a operação e paga a taxa livre de risco nesse empréstimo. Com os dois instrumentos expostos ao mesmo fator de risco, argumentaremos que os dois deveriam possuir remunerações equivalentes, e o prêmio entre as taxas de remuneração dos instrumentos deveria tender a zero no longo prazo. Tal argumentação será feita nas próximas seções do texto, onde explicaremos com maiores detalhes as fórmulas de apreamento e como são feitas as operações de ambos os instrumentos.

1.1 Revisão Bibliográfica

Apesar de não termos encontrado artigos relevantes sobre o instrumento casado de LTN e DI Futuro de 1 dia, a literatura de renda fixa no Brasil é vasta. Logo, já foram realizados diversos estudos sobre os dois tipos de instrumentos separadamente e sobre a curva de juros em si.

Inicialmente, vale mencionar os estudos existentes sobre modelagem da Estrutura a Termo da Taxa de Juros. São vários os estudos que se propõem a estimar taxas a termo para diferentes vencimentos a partir dos instrumentos disponíveis no mercado.

Martellini (2003) [Mar03] lista cinco fatos referentes à curva de juros. Dentre eles, o fato de as taxas de juros geralmente oscilarem em torno da média e, portanto, modelos de taxas de juros possuírem componente de reversão à média. Vasicek (1977) [Vas77] e Cox, Ingersoll & Ross (1985) [Cox85] se baseiam em modelos de equilíbrio onde especificam modelos estocásticos para representar a dinâmica das

taxas de juros. Os modelos de Ho & Lee (1986) [Ho86] e Hull & White (1990) [Hul90] se baseiam em modelos de não arbitragem focando em modelar curvas de juros com valores de taxas consistentes entre si para diferentes vencimentos. Nelson & Siegel (1987) [Nel87] apresentam um modelo paramétrico estatístico onde se decompõe a curva em três componentes: curto, médio e longo prazo. Diebold & Li (2006) [Die06] também propõem um modelo de três fatores: nível, inclinação e curvatura. Svensson (1994) [Sve94] apresenta um modelo muito parecido com Diebold & Li (2006) [Die06], porém agora acrescentando mais um fator de curvatura.

Sobre o mercado secundário de Títulos Públicos e suas respectivas limitações e efeitos de liquidez, vale citar os artigos de Tanner Kochin (1971) [Tan71] e Garbade Rosey (1977) [Gar77] que propõem modelos para os spreads entre compra e venda do mercado de Treasuries Americanos. Além disso, vale mencionar também Mendelson (1991) [Men91] e Elton Green (1998) [Elt01] que exploram as diferenças de apreçamento de treasuries para diferentes cenários de liquidez. Fleming (1997) [Fle97] e Remolona (1999) [Rem99] utilizam dados de alta frequência para estimar o padrão de spreads de compra e venda intraday contra cenários de volumes.

Em outros países que não os Estados Unidos, vale mencionar Díaz, Merrick e Navarro (2004) [Día04] que propõem um estudo sobre a volatilidade do mercado secundário de títulos públicos da Espanha antes e depois da consolidação da união monetária na Europa.

Especificamente sobre o mercado futuro de taxa de juros no Brasil, recomendamos o estudo desenvolvido por Garcia & de La Rocque (1994) [Gar94]. Nele, os autores discorrem sobre o funcionamento do mercado de Futuro de DI de 1 dia e suas peculiaridades em relação aos mercados de juros de outros países. A partir daí, desenvolvem um aparato teórico-ecnomométrico necessário para analisar empiricamente o mercado futuro de DI.

Por fim, mencionamos aqui também o estudo de Tonholo (2011) [Ton11] sobre a estrutura a termo de taxas de juros brasileira do ponto de vista dos processos estocásticos. Nele, o autor parte da curva de DI e modela a estrutura a termo da curva levando em consideração expectativas de política monetária para a parte curta da curva e aplica as condições de não arbitragem sobre os bonds para estabelecer um vínculo entre as taxas em diferentes maturidades para a parte longa da curva. Recomendamos também Pixiolini, (2014) [Pix14] que utiliza o modelo de Heath, Jarrow e Morton (1992) para a geração de cenários de stress da curva de juros do mercado brasileiro.

Capítulo 2

Os Instrumentos Financeiros

2.1 Letras do Tesouro Nacional (LTN)

Como mencionado anteriormente, a Letra do Tesouro Nacional (LTN) representa um empréstimo, feito pelo investidor para o Tesouro Nacional, no qual o Tesouro se compromete a pagar, na data de vencimento acordada, o valor de face do título ao investidor. O Valor de Face da LTN é de R\$ 1.000,00.

Tais títulos são vendidos a mercado pelo Tesouro Nacional como oferta primária através de leilões semanais organizados pelo mesmo. Uma vez vendidos ao mercado são então negociados diariamente entre os integrantes do mercado financeiro através de negociações no mercado secundário. Para que estas negociações, e consequentemente a liquidez, sejam possíveis, se torna necessário que os títulos possuam uma marcação a mercado das taxas que estão sendo negociadas em tempo real para os determinados vencimentos. Com tais taxas pré-fixadas variando de valor conforme as condições corrente de mercado, surge então a necessidade de uma fórmula para a precificação do título, dada a taxa de mercado no momento da negociação. A precificação do título da LTN é dada por:

$$PU_{LTN} = \frac{1.000}{(1 + \alpha)^{(t/252)}} \quad (2.1)$$

onde PU_{LTN} é o preço unitário do título, α é a taxa ao ano, pré-fixada para o vencimento em questão e t é o número de dias úteis até o vencimento da LTN.

Como vimos acima, uma LTN se trata de uma promessa de recebimento do valor de R\$1.000,00 em uma data futura. Logo, para se analisar qual seria o preço justo deste título em uma data anterior ao seu vencimento, deve-se calcular o valor presente deste fluxo de R\$1.000,00 a ser recebido.

Para ilustrar melhor como seria a operação, vamos analisar a seguir um exemplo:

No dia 26 de Agosto de 2021, a LTN de vencimento Janeiro/2023 estava sendo negociada no mercado a uma taxa de 8,565% a.a. Nesta data, faltavam 352 dias úteis para o vencimento do título. Logo, pela equação (2.1) podemos calcular o preço unitário do título como sendo:

$$PU = \frac{1.000}{(1,08565)^{(352/252)}} = 891,55$$

Logo, um investidor que quisesse comprar um título do tipo LTN no dia 26/08/2021 para receber no seu vencimento (01/01/2023) a quantia de R\$1.000,00 deveria pagar na aquisição do título o valor de R\$891,55.

Vamos assumir então que o investidor consegue tomar essa quantia emprestada, sem custos de trasação, pagando de juros a taxa livre de risco, ou seja, a taxa de DI. Vamos assumir então que o investidor segure em seu portfólio a posição comprada no título até o dia 30 de Agosto de 2021. Nesse momento, o investidor vende seu título a mercado e liquida o empréstimo que havia feito anteriormente. A diferença entre o preço de venda da LTN e o valor de liquidação do empréstimo será o resultado da operação.

No dia 30/08/2021, quando ocorreu a liquidação da operação, a taxa que estava sendo negociada a LTN Jan/23 no mercado era 8.493% a.a. e faltavam 350 dias úteis para o vencimento do título. Logo, pela equação (2.1) podemos calcular o preço unitário do título como sendo:

$$PU = \frac{1.000}{(1,08493)^{(350/252)}} = 892,96$$

Ou seja, o investidor vendeu seu título por R\$892,96.

Além disso, a taxa DI nesse período era de 5,15% ao ano. Logo, o rendimento do CDI no período entre a aquisição do título e a venda do mesmo a mercado foi de 0,0399% no período. Com isso, podemos calcular o valor da quitação do empréstimo EQ como sendo:

$$EQ = 891,55 \times 1,000399 = 891,91$$

Finalmente, sendo ET o valor do empréstimo tomado (valor este igual ao PU de compra) e EQ o valor do empréstimo quitado, podemos então calcular o resultado R_{LTN} da operação como:

$$R_{LTN} = (PU_{LTN23Venda} - PU_{LTN23Compra}) + (ET - EQ)$$

Que simplificando fica:

$$R_{LTN} = PU_{LTN23Venda} - EQ$$
$$R_{LTN} = 892,96 - 891,91 = 1,0532$$

Logo, a operação deu R\$1,05 de lucro, ou $\frac{1,05}{891,55} = +0,12\%$ de resultado no período.

Vale mencionarmos que esse resultado se originou de duas componetes: A primeira componente foi o simples passar de dois dias, período no qual ocorreu a valorização do título a uma taxa maior do que a taxa que o investidor estava pagando pela aquisição do capital necessário através de empréstimo. Chamaremos esta componente de “Componente Carrego”. A outra componente, denominada de “Componente Direcional”, originou a maior parte do resultado no nosso exemplo. Como podemos notar, a taxa de juros marcada a mercado no momento da compra do título era consideravelmente maior do que a taxa de juros marcada a mercado no momento da venda do mesmo. Ou seja, nesse período, a taxa de remuneração do título caiu, gerando uma valorização do valor financeiro do mesmo muito maior do que a originalmente prometida. Em termos anualizados, o rendimento da operação foi de 16% ao ano. Isso ocorre, pois ao adquirir um título LTN o investidor gera uma exposição ao fator de risco da Taxa de Juros Pré-fixada Brasileira do vencimento em questão.

Para mais informações sobre o instrumento, dentre outras referências citamos Berger (2015) [Ber15] sobre o mercado de renda fixa brasileiro.

2.2 Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (DI1)

Como mencionado anteriormente, o contrato de Futuro de DI1 representa uma troca de remuneração onde o investidor em uma ponta pagará uma taxa pré-fixada acordada no momento da negociação e receberá a taxa de DI de um dia efetiva acumulada no período desde a negociação até o encerramento da posição. O investidor na outra ponta pagará a taxa de DI efetiva e receberá a taxa pré-fixada acordada no momento da negociação. O valor de face do contrato no vencimento é de R\$100.000,00. Logo, na data de negociação, o preço unitário de cada contrato será o valor de R\$100.000,00 trazido a valor presente pela taxa negociada. O contrato possui vencimentos para o primeiro dia de todo mês. A precificação do

preço unitário do Futuro de DI1 é dada por:

$$PU_{DI1} = \frac{100.000}{(1 + \alpha)^{(t/252)}} \quad (2.2)$$

onde PU_{DI1} é o preço unitário do contrato, α é a taxa préfixada para o vencimento em questão e t é o número de dias úteis até o vencimento do futuro.

Para mais informações sobre o derivativo, recomendamos Hull(2016) [Hul16] e Satyajit(1994) [Das94].

Da mesma forma que fizemos anteriormente no caso da LTN, vamos agora analisar um exemplo de operação para as mesmas datas para o Futuro DI1 de vencimento em 01/01/2023:

No dia 26 de Agosto de 2021, o Futuro DI1 de vencimento Janeiro/2023 estava sendo negociado no mercado a uma taxa de 8,47% a.a. Nesta data, faltavam 352 dias úteis para o vencimento do título. Logo, pela equação (2.2) podemos calcular o preço unitário do título como sendo:

$$PU_{DI1} = \frac{100.000}{(1,0847)^{(352/252)}} = 89.264,46$$

Logo, um investidor que quisesse comprar um contrato de DI1 Futuro no dia 26/08/2021 estaria adquirindo um contrato de valor unitário de R\$89.264,46. Desta vez, diferente do caso da LTN, não seria necessária a utilização de caixa para a operação por se tratar de um contrato de futuro.

Vamos assumir então que, da mesma forma que no exemplo anterior, o investidor segure em seu portfólio a posição comprada no PU do contrato até o dia 30 de Agosto de 2021. Nesse momento, o investidor vende seu contrato a mercado, zerando a posição.

Por se tratar de um contrato futuro, o investidor ao longo desse período terá recebido (ou pago) uma sequência de ajustes diários referente à operação. Na tabela 2.1 calcularemos cada um desses ajustes para analisarmos o resultado da operação toda.

Na tabela, compramos o título pelo PU de fechamento do dia 26/08/2021 e o vendemos pelo PU de fechamento do dia 30/08/2021. Todos os dias, são acumulados ajustes diários que são calculados a partir do PU de fechamento do dia menos o PU de abertura do mesmo dia. O PU de abertura é calculado a partir do PU de fechamento do dia anterior carregado de um dia da taxa de CDI corrente.

Data	Taxa Fech.	CDI	NDU	PU Abert.	PU Fech.	Ajuste Diário
26/08/21	8,47	5,15	352	-	89.264,46	-
27/08/21	8,44	5,15	351	89.282,25	89.327,68	45,42
30/08/21	8,395	5,15	350	89.345,48	89.407,93	62,45
Total :						107,87

Tabela 2.1: Exemplo Futuro de DI

Como podemos observar acima, a operação resultou $R\$107,87$ de lucro, ou $\frac{107,87}{89.264,46} = +0,12\%$ de resultado.

Da mesma forma que na LTN, esse resultado se originou de duas componentes: A primeira componente foi o simples passar de dois dias, período no qual ocorreu a valorização do PU a uma taxa maior do que a taxa de DI contra o qual o resultado do ajuste diário é descontado. De forma análoga à LTN, é a “Componente Carrego”. Da mesma forma que a LTN, a “Componente Direcional” originou a maior parte do resultado no nosso exemplo. Como podemos notar, a taxa de juros marcada a mercado no momento da compra do Futuro era consideravelmente maior do que a taxa de juros marcada a mercado no momento da venda do mesmo. Ou seja, nesse período, a taxa de remuneração do Futuro caiu, gerando uma valorização do valor financeiro do mesmo muito maior do que a originalmente prometida. Em termos anualizados, o rendimento da operação também foi de 16% ao ano. Isso ocorre, pois ao adquirir o futuro o investidor gera uma exposição ao fator de risco da Taxa de Juros Pré-fixada Brasileira do vencimento em questão.

2.3 Futuro de DI1 e LTN - O “Instrumento Casado”

Não coincidentemente, os resultados dos exemplos anteriores foram praticamente idênticos. Isso ocorre, pois os dois instrumentos geram exposição ao mesmo fator de risco: a Taxa de Juros Pré-Fixada Brasileira. Além disso, a precificação dos dois instrumentos é feita da mesma forma, com a exceção que o valor de face do Futuro de DI1 é 100 vezes maior que o valor de face da LTN. Em outras palavras, o DI1 Futuro se trata de um derivativo que simula a equivalente operação de compra de 100 títulos de LTN de mesmo vencimento, na qual o dinheiro utilizado para a realização da operação foi tomado via empréstimo onde se cobra a taxa de CDI anual capitalizada diariamente.

Como explicamos anteriormente, o resultado dessas operações pode ser dividido em duas componentes: a componente carregos e a componente direcional. Uma vez que estes instrumentos geram uma mesma exposição direcional ao mesmo fator de risco (com a exceção de que o DI1 Futuro gera uma exposição 100 vezes maior), o investidor pode fazer então uma operação casada, onde se compra um dos instrumentos e se vende o outro instrumento na proporção correta. Por exemplo, se compra x contratos da LTN e se vende $\frac{x}{100}$ contratos do DI1 Futuro. Este instrumento conjunto é denominado “Instrumento Casado” no mercado.

Ao realizar esta operação, o investidor se protege do risco direcional do fator de risco gerado por cada uma das pontas. Ou seja, se a taxa subir, o dinheiro perdido na LTN será compensado pelo dinheiro ganho do DI1 Futuro. Se a taxa cair, o dinheiro ganho na LTN compensará o dinheiro perdido no DI1 Futuro. Da mesma forma, o efeito carregos positivo de uma operação será quitado pelo efeito negativo da outra operação. Ou seja, se a taxa de remuneração da LTN for maior que a taxa de CDI do empréstimo, o investidor teria um efeito carregos positivo. Porém, no DI Futuro, o investidor estaria pagando a taxa pré-fixada que seria maior do que o CDI que estaria recebendo no derivativo. Logo, o investidor teria um efeito carregos negativo no derivativo. Com isso, podemos concluir que, uma vez que as taxas da LTN e do Derivativo sejam iguais, o efeito carregos do resultado da operação casada, também será nulo.

Abaixo analisamos como teria sido a operação casada nos exemplos anteriores:

Supondo que o investidor fizesse uma operação onde compra 100 títulos LTN de vencimento Janeiro/2023 pegando o dinheiro necessário para a realização da operação emprestado à taxa de juros igual ao CDI no período, capitalizado diariamente. Nesse caso, o resultado da ponta comprada na LTN seria de 100 vezes o resultado do exemplo anterior. Ou seja, sendo R_{LTN} o resultado obtido na operação, temos:

$$R_{LTN} = 100 \times 1,0532 = 105,32$$

Por se tratar de uma operação casada, o investidor nesse caso também fará uma operação de venda de DI1 Futuro 100 vezes menor do que a operação de LTN. Ou seja, o investidor venderá 1 contrato do derivativo. Logo seu resultado R_{DI1} será:

$$R_{DI1} = -1 \times 107,87 = -107,87$$

Com isso, o resultado final R_{Total} da operação será a soma das duas pontas:

$$\begin{aligned} R_{Total} &= R_{LTN} + R_{DI1} \\ &= 105,32 - 107,87 \\ &= -2,55 \end{aligned}$$

Como podemos observar acima, o resultado não foi zero conforme esperávamos pela teoria explorada. Na teoria desenvolvida nesse artigo, o resultado seria zero se a premissa adotada fosse verdadeira, ou seja, se as taxas da LTN e do DI1 Futuro fossem as mesmas. Quando vemos na prática, esta premissa não é verdadeira. Há uma diferença entre as taxas de remuneração dos dois instrumentos apesar dos instrumentos apresentarem dinâmicas equivalentes. Além disso, esse prêmio não é um valor constante ao longo do tempo e varia também de acordo com o vencimento da operação em questão. Logo, a operação casada de LTN com DI1 Futuro que deveria apresentar risco zero, apresenta na verdade uma exposição à um outro fator de risco: a diferença (spread) entre as duas taxas. Essa diferença, expressa em base points (0,01%), será denominada como o “preço do casado”.

Ainda analisando nosso exemplo, se olharmos as taxas dos dois instrumentos no dia da abertura da posição e no dia da liquidação da mesma, podemos calcular os preços dos casados, denominados em taxa:

Data	Taxa LTN	Taxa DI1	Preço Casado
26/08/21	8.565	8.47	9.5bps
27/08/21	8.493	8.395	9.8bps

Tabela 2.2: Preço do Casado do Exemplo

Uma vez que o investidor havia comprado o título da LTN, logo concluímos que ele estava vendido na taxa da mesma. Ou seja, possuía uma exposição negativa à taxa de juros da LTN. Ao convencionarmos que o preço do casado é a taxa da LTN decrescida da taxa do DI1 Futuro, podemos concluir então que o investidor, no nosso exemplo, estava vendido no preço do casado. Como o preço do casado teve uma variação positiva de 0,3 base points na operação, o investidor teve então um resultado negativo na mesma.

Capítulo 3

Modelo Ornstein–Uhlenbeck

3.1 O Modelo Genérico

O Processo de Ornstein-Uhlenbeck, desenvolvido pelos físicos holandeses Leonard Ornstein e George Eugene Uhlenbeck, é também conhecido como um processo de reversão a média. Trata-se de um processo Gaussiano e Markoviano, ou seja, um processo em um domínio contínuo (tempo) seguindo a Distribuição Normal e seu valor no instante $t + 1$ dependendo somente de seu estado no instante t .

Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade, onde Ω é o espaço amostral, \mathcal{F} a sigma-álgebra e P a medida de probabilidade, a dinâmica do processo Ornstein-Uhlenbeck é dada por:

$$dX_t = \kappa(\bar{X} - X_t)dt + \sigma dB_t \quad \forall t \geq 0, X_0 = x \quad (3.1)$$

sendo \bar{X} a média de longo prazo de X , $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ a volatilidade, $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ a velocidade de reversão, e dB_t o incremento do processo Browniano padrão associado ao momento t .

A solução X_t da EDE (Equação Diferencial Estocástica) acima é dada por:

$$X_t = \bar{X} + (X_0 - \bar{X})e^{-\kappa t} + \sigma \int_0^t e^{\kappa(u-t)} dB_u \quad (3.2)$$

De onde podemos concluir também que:

$$E^P[X_t] = \bar{X} + (X_0 - \bar{X})e^{-\kappa t} \quad (3.3)$$

$$Var^P(X_t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t}) \quad (3.4)$$

Mostramos os calculos detalhados de como se obter as equações (3.2), (3.3) e (3.4) no anexo A.

A partir dos resultados obtidos para o valor esperado e a variância do processo, podemos facilmente observar que, quando $t \rightarrow \infty$, o valor esperado tende a \bar{X} (que é a média de longo prazo), e a variância tende a um valor contante $\frac{\sigma^2}{2\kappa}$. Dessa forma, podemos concluir que se trata de um processo cujo valor reverte à média.

Tal processo de reversão é muito utilizado para modelagem de instrumentos financeiros. Mais especificamente, costuma ser muito usual a utilização deste processo para a modelagem de instrumentos relacionados à taxa de juros e também aos preços de commodities.

Para a modelagem de taxas de juros, observamos que as mesmas se comportam em sincronismo com os ciclos econômicos da economia. Quando a economia está desaquecida, os bancos centrais e conseqüentemente os demais agentes econômicos tendem a afrouxar as condições monetárias, gerando assim uma baixa nas taxas de juros de mercado permitindo desta forma a eventual retomada da atividade econômica e então o reaquecimento da economia. Já para uma economia superaquecida, é muito comum observarmos a demanda eventualmente com uma força superior à oferta gerando assim pressões inflacionárias nos preços. Como resposta, é comum vermos reações de aperto monetários de bancos centrais, e conseqüentemente também de outros agentes econômicos, desacelerando assim a economia, elevando as taxas de juros no mercado e controlando assim as possíveis pressões inflacionárias.

Já para a aplicação do processo para a modelagem de preços de commodities, também podemos fazer uma relação entre os preços e a situação corrente da economia ou do setor. Basicamente, preços mais altos de commodities estimulam sua produção exagerada aumentando assim a oferta e trazendo os preços de volta para a média de longo prazo. Da mesma forma, preços baixos de determinadas commodities desestimulam sua produção reduzindo assim a oferta das mesmas e também trazendo seus preços de volta à média de longo prazo.

Para mais referências sobre o processo de Ornstein–Uhlenbeck, citamos Aiube (2013) [Aiu13] e Jacobsen (1996) [Jac96]. Dentre outras referências sobre Processos Estocásticos no geral, citamos Desmond (2001) [Hig01], Øksendal (2014) [Øks14], Shreve (2004) [Shr04] e Steele (2012) [Ste12].

3.2 A Estimação dos Parâmetros do Modelo Ornstein–Uhlenbeck

Como vimos anteriormente, a dinâmica do processo Ornstein-Uhlenbeck é dada por:

$$dX_t = \kappa(\bar{X} - X_t)dt + \sigma dB_t \quad \forall t \geq 0, X_0 = x \quad (3.5)$$

e a solução X_t da EDE acima é dada pela equação 3.2 :

$$X_t = \bar{X} + (X_0 - \bar{X})e^{-\kappa t} + \sigma \int_0^t e^{\kappa(u-t)} dB_u \quad (3.6)$$

Se intergramos entre $t - 1$ e t , ficamos com:

$$e^{\kappa t} X_t - e^{\kappa(t-1)} X_{t-1} = \bar{X}(e^{\kappa t} - e^{\kappa(t-1)}) + e^{\kappa t} \varepsilon_t \quad (3.7)$$

onde $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ e σ_ε^2 é a variância de X_t dada por:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa}) \quad (3.8)$$

Desenvolvendo então a equação (3.7),

$$\begin{aligned} X_t - e^{-\kappa} X_{t-1} &= \bar{X}(1 - e^{-\kappa}) + \varepsilon_t \\ X_t &= \bar{X}(1 - e^{-\kappa}) + e^{-\kappa} X_{t-1} + \varepsilon_t \\ X_t - X_{t-1} &= \bar{X}(1 - e^{-\kappa}) + (e^{-\kappa} - 1)X_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Escrevemos então:

$$X_t - X_{t-1} = a + bX_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.9)$$

onde:

$$a = \bar{X}(1 - e^{-\kappa}), \quad b = e^{-\kappa} - 1$$

Logo, podemos estimar os parâmetros como:

$$\hat{X} = -\frac{\hat{a}}{\hat{b}}$$

$$\hat{\kappa} = \log\left(\frac{1}{\hat{b} + 1}\right)$$

E por fim:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa})$$

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \frac{2\hat{\kappa}}{(1 - e^{-2\hat{\kappa}})}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \log\left(\frac{1}{\hat{b} + 1}\right)^2 \frac{1}{1 - (\hat{b} + 1)^2}$$

Chegando finalmente a:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \frac{\log(\hat{b} + 1)^2}{(\hat{b} + 1)^2 - 1}}$$

3.3 Modelo Ornstein–Uhlenbeck aplicado ao preço do Casado

Como mencionado anteriormente, nesse artigo modelamos a diferença entre a taxa média de um título público, bullet, pré-fixado do Tesouro Nacional Brasileiro e a taxa do derivativo de DI1 Futuro, de mesmo vencimento, negociado na Bolsa de Valores de São Paulo, B3.

Como também já vimos, essa diferença entre taxas é chamada de “Preço do Casado”, e a teoria por trás da formação deste preço indica que deveríamos ter essa diferença sempre tendendo a zero. Deveriam ocorrer apenas leves variações por questões idiossincráticas de cada momento que afetariam o preço do casado de forma aleatória para ambos os sentidos. Em outras palavras, as variações de preço do casado deveriam representar apenas ruído de mercado expresso como forma de volatilidade, fator que deveríamos poder modelar através de um movimento Browniano.

Vale mencionar que a teoria no desenvolvimento do processo de Ornstein Uhlenbeck é tratada para o tempo contínuo. Por outro lado, conforme foi explorado anteriormente, as fórmulas oficiais de precificação dos títulos públicos LTN e dos derivativos Futuros de DI1 são todas formuladas para o tempo discreto. Além disso, por questões de liquidez no mercado de títulos e horários específicos de negociações dos mesmos em leilão, as séries de preços obtidas para nossas análises são todas de preços de fechamento, um preço para cada dia da série. Por isso, utilizamos nesse estudo o modelo de Ornstein–Uhlenbeck discretizado utilizando para isso Δt de 1 dia.

Retomando o racional desenvolvido na seção 2.3, vimos que uma operação aplicada no Futuro de DI1, ou seja, onde o investidor compra o contrato para receber uma remuneração pré-fixada e pagar em troca uma remuneração flutuante, acruada diariamente, referenciada a taxa de DI, possui a mesma dinâmica que uma estratégia onde se compra um título do tipo LTN e se financia essa compra através de um empréstimo que paga taxa livre de risco (taxa DI) também acruado diariamente. Lembramos que no cenário tratado, não existem custos de transação ou qualquer outro tipo de ineficiência de mercado. Desenvolvemos a seguir um pouco mais a formulação de ambas as estratégias e suas similaridades.

Supondo um mercado livre de arbitragem, podemos imaginar a situação em que um investidor pega dinheiro emprestado à taxa média livre de risco acruada diariamente e usa esse dinheiro para adquirir títulos LTN de determinado vencimento. O investidor então segura o título até sua expiração onde finalmente liquida o empréstimo feito. Para que não haja arbitragem, devemos supor que o valor pago pelo empréstimo será igual ao valor recebido ao se carregar o título até o vencimento. Logo:

$$(1 + \alpha)^{(t/252)}X - (1 + \beta)^{(t/252)}X = 0 \quad (3.10)$$

Na equação acima, α representa a taxa pré-fixada obtida no momento de negociação do título LTN, t representa o número de dias úteis até o vencimento, β representa a taxa DI acruada diariamente para o pagamento do valor adquirido no empréstimo e X representa o valor financeiro inicial obtido no empréstimo em D0 e investido integralmente na compra de LTNs.

De forma similar, como visto anteriormente, tentando replicar tal comportamento o contrato de DI1 Futuro funciona como se fosse uma troca de taxas, onde o aplicador recebe a taxa pré-fixada e paga a taxa de DI de 1 dia pós-fixada. De forma análoga, o tomador paga a taxa pré-fixada e recebe a taxa de DI de 1 dia pós

fixada. Obviamente, por se tratar de um derivativo marcado a mercado, conforme os preços vão flutuando, os saldos da operação vão sendo quitados por meio de ajustes diários. A fórmula para se calcular o valor do somatório de ajustes diários ocorridos de D0 até a data de vencimento é dada por:

$$(1 + \gamma)^{(t/252)}X - (1 + \beta)^{(t/252)}X \quad (3.11)$$

Na equação acima, γ representa a taxa pré-fixada anualizada obtida no momento de negociação do contrato futuro, t representa o número de dias úteis até o vencimento, β representa a taxa DI anualizada acruada diariamente para o pagamento do ajuste diário e X representa o valor financeiro inicial do futuro.

Assumindo um mercado sem possibilidade de arbitragem, onde a taxa pré-fixada do derivativo reflete a expectativa de mercado perfeita da trajetória da taxa de DI de 1 dia até o vencimento do ativo, a operação não deveria dar resultado e a equação acima deveria ser igual a zero, resultando no mesmo valor da equação 3.10. Obviamente, arbitradores operam este mercado aproveitando-se do fato de que as previsões de mercado acabam contendo erros e necessitando de correções ao longo do tempo. Tal fenômeno permite então aos arbitradores, que acreditam ter uma melhor previsão da trajetória da taxa de juros, a obtenção de lucros através desses instrumentos.

Dessa forma, olhando apenas para as fórmulas de resultado das estratégias e para a hipótese de mercado livre de arbitragem, não haveria nenhum motivo aparente para que a taxa pré-fixada de determinada LTN fosse diferente da taxa pré-fixada do contrato derivativo de DI de 1 dia Futuro. Ou seja, a diferença entre as taxas deveria ser zero.

Em outras palavras, vamos assumir que um investidor realizará a primeira estratégia, comprando LTN e adquirindo o empréstimo, para um valor financeiro X . Também realizará o inverso da segunda estratégia no mesmo financeiro X . Além disso, vamos assumir todas as premissas necessárias para que tenhamos um mercado sem arbitragem. O resultado desse portfólio hipotético deveria ser dado pela soma das duas equações anteriores e, assumindo um mercado sem arbitragem, seu resultado deveria ser zero. Logo, a relação entre as taxas de remuneração dos dois instrumentos deveria ser dada por:

$$\begin{aligned}
(1 + \alpha)^{(t/252)} X - (1 + \beta)^{(t/252)} X - (1 + \gamma)^{(t/252)} X + (1 + \beta)^{(t/252)} X &= 0 \\
(1 + \alpha)^{(t/252)} X - (1 + \gamma)^{(t/252)} X &= 0 \\
(1 + \alpha)^{(t/252)} X &= (1 + \gamma)^{(t/252)} X \\
(1 + \alpha)^{(t/252)} &= (1 + \gamma)^{(t/252)} \\
\alpha &= \beta
\end{aligned}$$

Como veremos mais à frente ao analisarmos os dados deste estudo, isso não ocorre. Sempre há uma diferença entre as taxas, onde normalmente a taxa da LTN acaba operando acima da taxa do derivativo. Possíveis motivos para isso podem ser questões como liquidez, volatilidade de mercado, intensidade com que o Tesouro Nacional emite seus títulos, risco de contraparte do contrato, entre outros. Na próxima seção do estudo, nos dedicaremos a propor possíveis causadores para esta diferença entre taxas, apenas com o intuito de contextualizar a origem dos movimentos que serão modelados posteriormente.

O que iremos testar então é como o preço casado desses dois ativos se comporta em uma modelagem OU. Dada toda a argumentação anterior, seria de se esperar um comportamento de reversão à média com as forças externas possivelmente responsáveis pelo descasamento entre as taxas se comportando apenas como geradores de volatilidade. Ou seja, não parece fazer sentido que determinados eventos extrínsecos acabem descolando estas taxas de forma estrutural. Seria de se imaginar que, eventualmente, tais geradores de volatilidade acabassem sendo dissipados e o casado das taxas retornasse então à média de longo prazo.

3.4 Possíveis Geradores da Volatilidade no Modelo

Nesta seção, com o intuito de ilustrarmos um pouco mais a dinâmica dos instrumentos e com isso entendermos um pouco melhor o comportamento do casado, apenas mencionaremos possíveis geradores de volatilidade do modelo. Ou seja, exploraremos um pouco possíveis fatores que façam com o que o preço do casado se distancie momentaneamente de sua média de longo prazo.

Liquidez do Instrumento

Conforme mencionado anteriormente, as LTNs são títulos públicos utilizados pelo Tesouro Nacional para financiar sua dívida junto ao mercado financeiro. Tais títulos são trazidos inicialmente ao mercado através de oferta primária realizada nos leilões semanais do Tesouro. Como em toda gestão de passivos, o Tesouro Nacional está constantemente analisando o prazo médio de sua dívida a fim de mitigar tanto os riscos direcionais quanto o risco de refinanciamento. Vale lembrar também que as LTNs são instrumentos pré-fixados voltados para o financiamento de curto e médio prazo. Logo, conforme o prazo médio da carteira de LTNs do Tesouro vai diminuindo com o passar do tempo, surge a necessidade do Tesouro ofertar ao mercado LTNs de novos vencimentos. Em outras palavras, há necessidade de se rolar o vencimentos das LTNs que vem sendo ofertadas ao mercado. Quando um novo vencimento de LTN começa a ser ofertado, há um período inicial no qual a liquidez daquele vencimento ainda é baixa, o que pode vir a dificultar sua negociação no mercado secundário e com isso interferir no preço do Instrumento Casado de mesmo vencimento.

Volatilidade / Stress do Mercado

O mercado secundário de títulos públicos se dá através de negociações de Balcão, principalmente em leilões organizados pelas corretoras. Ou seja, trata-se de um tipo de negociação relativamente informal e pouco automatizado. Já o instrumento de DI Futuro se trata de um instrumento registrado e negociado em bolsa, com uma negociação mais organizada e automatizada. Além disso, como vimos anteriormente, o título público demanda uma colocação de caixa para sua negociação, diferentemente do derivativo que não necessita de alocação de capital.

Naturalmente os fatores mencionados acabam dando mais liquidez para os instrumentos derivativos do que para os títulos públicos. Em momentos de maior stress no mercado, onde historicamente o investidor acaba dando preferência por liquidez, é comum que haja uma maior demanda pela aquisição do instrumento mais líquido do que pela aquisição do menos líquido. Esse fator poderia gerar diferenças temporárias entre a taxa remunerada pelos dois instrumentos. Ou seja, poderia fazer com que momentaneamente as taxas remuneradas pelas LTNs sejam maiores que as taxas do DI Futuro.

Volume dos Leilões do Tesouro Nacional

Por diferentes motivos relacionados a como o Tesouro Nacional faz a sua gestão de dívida, podemos ter em momentos diferentes uma maior preferência do Tesouro em se financiar através de diferentes ativos. Por exemplo, momentos em que a curva de juros se encontra em níveis muito baixos podem dar ao Tesouro preferência por se financiar através de instrumentos pré-fixados. Mais ainda, se estivermos um momento de taxas baixas e curva muito positivamente inclinada (onde as taxas curtas são mais baixas do que as longas), podemos ter o Tesouro dando preferência a se financiar em maior volume exatamente nas LTNs. De forma análoga, em momentos de taxas de juros muito elevadas no Brasil, o Tesouro tenderia a dar maior preferência a um financiamento através de títulos pós-fixados, ou seja LFTs. Uma maior oferta de títulos LTN pelo Tesouro pode acabar inundando o mercado deste título, diminuindo a demanda pelo mesmo e conseqüentemente aumentando suas taxas de remuneração em relação ao derivativo. Da mesma forma, uma diminuição da oferta do título tenderia a ter um efeito negativo nas taxas remuneradas. Essas flutuações de oferta e demanda das LTNs tendem a gerar volatilidade nas taxas dos títulos em relação às taxas dos derivativos. Ou seja, geram volatilidade no preço do Casado.

Capítulo 4

Resultado da Modelagem

4.1 Descrição da série de dados analisada

Neste estudo, foram utilizadas séries da diferença entre as taxas dos títulos LTN e seus derivativos de vencimento equivalente. Foram analisados os seguintes vencimentos: Jan/20, Jan/22, Jul/22, Jan/23, Jul/23 e Jan/24. As séries analisadas vão do período de 02 de janeiro de 2017 a 21 de setembro de 2021.

Tratam-se de séries de preços de fechamento diários onde os tamanhos das amostras variam de 431 a 932 observações a depender do vencimento.

Vale mencionar que os vencimentos das LTNs são lançados pelo Tesouro Nacional sempre com cerca de quatro anos de antecedência. O Tesouro começa então a leiloar seus novos vencimentos semanalmente, e tais vencimentos começam então a, gradualmente, ir ganhando mais liquidez no mercado. Por isso, nas séries de dados mais longas analisadas, o período observado é o período máximo possível de quatro anos. Quando uma nova LTN é lançada no mercado, seu respectivo contrato derivativo futuro de DI de 1 dia já é negociado no mercado, mas algumas vezes com pouca liquidez. É comum observarmos então o contrato do derivativo ir aumentando sua liquidez junto com sua respectiva LTN sendo leiloada pelo Tesouro. Tal fenômeno reflete a relevância do instrumento do casado para o funcionamento do mercado de pré-fixados brasileiro. Esse aumento de liquidez pode ser facilmente percebido na Figura 4.1. Nela é possível observar um incremento expressivo, na derivada e no absoluto, no número de contratos em aberto do DI1 Futuro de vencimento Jan/2024. Este incremento ocorre a partir do mês de Janeiro de 2020, data na qual o tesouro começou a leiloar a LTN de mesmo vencimento.



Figura 4.1: Contratos em Aberto DI1 Jan/24

Os vencimentos escolhidos para análise no desenvolvimento deste estudo foram os referentes as LTNs que já possuem liquidez no mercado no momento em que o estudo foi desenvolvido. Além disso, foi analisada a LTN Jan/20 também (a única que já está vencida no presente momento), para tentarmos analisar uma série mais antiga que englobe um período eleitoral (eleições de 2018). Sabemos que, assim como em diversos países emergentes, no Brasil o andamento dos ciclos econômicos é muito dependente dos ciclos políticos. Como consequência disso, períodos eleitorais acabam tendo forte influência nos preços de mercado e em sua volatilidade também. Por isso, é de se esperar que faria sentido analisar a diferença entre Títulos Públicos e seus respectivos derivativos em um período de tamanha turbulência.

A Figura 4.2 apresenta as séries históricas de preços, representadas em base points, dos spreads entre as taxas das LTNs e seus respectivos contratos de DI1 Futuro:



Figura 4.2: Série Histórica - Preços do Casado

Podemos observar na Tabela 4.1 também os dados estatísticos que foram levantados em uma análise inicial das séries de dados:

	Jan20	Jan22	Jul22	Jan23	Jul23	Jan24
# Amostras	745	932	807	620	620	431
Média	-1,7	0,9	5,3	12,3	13,2	19,6
Max.	6,8	12,8	18,5	36,7	36,7	37,5
Min.	-8,8	-21,7	17,8	0	0	0
Desv. Padrão	2,63	4,83	6,83	9,69	10,34	10,22
Curtose	0,25	1,83	-0,28	-1,12	-1,43	-1,35
Assimetria	-0,24	-0,77	0,09	0,56	0,41	-0,35
JB	8,87	223,28	3,57	64,44	69,86	41,34
p-value	0,012	0,000	0,168	0,000	0,000	0,000

Tabela 4.1: Estatísticas das Séries Históricas dos Casados

4.2 Estimação dos Parâmetros do Modelo

Uma vez feita a análise inicial das séries de preços dos casados, usamos então as séries de variação diárias de preços para que, utilizando a teoria explicada na seção 3.2, pudessem então ser estimados os parâmetros do processo de Ornstein–Uhlenbeck. De acordo com o que foi visto na teoria por trás da estimação dos parâmetros, temos que estes devem ser estimados a partir da equação 3.9, repetida abaixo:

$$X_t - X_{t-1} = a + bX_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.9)$$

onde X_t refere-se ao preço do casado na data t , ou seja, sendo γ_t a taxa de fechamento do Futuro DI1 na data t , e, α_t a taxa de fechamento da LTN de mesmo vencimento também na data t , temos:

$$X_t = \alpha_t - \gamma_t$$

Além disso, vimos anteriormente que:

$$\begin{aligned} \hat{X} &= -\frac{\hat{a}}{\hat{b}} \\ \hat{\kappa} &= \log\left(\frac{1}{\hat{b} + 1}\right) \\ \hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \log(\hat{b} + 1)^2}{(\hat{b} + 1)^2 - 1}} \end{aligned}$$

Onde, \hat{X} será a média de longo prazo do modelo, $\hat{\kappa}$ será a constante que denota a velocidade de reversão à média do modelo e $\hat{\sigma}$ será o valor da volatilidade do modelo.

Em outras palavras, utilizamos n dados de uma série de preços de fechamento para o instrumento casado, e a regredimos em cima da série também de n dados da variação dos preços de fechamento $t - 1$ e t do instrumento casado. Rodamos esta regressão com os dados para, segundo explicado na teoria, estimarmos empiricamente os valores das constantes a e b . Finalmente, uma vez estimadas essas constantes, utilizando a teoria explicada no final da seção 3.2, podemos calcular empiricamente os parâmetros \bar{X} , κ e σ do modelo.

Na tabela 4.2, podemos observar os parâmetros estimados para cada um dos vencimentos analisados nesse estudo:

	Jan20	Jan22	Jul22	Jan23	Jul23	Jan24
a	-0,008	0,018	0,033	0,05	0,051	0,146
p-valor	0,72	0,49	0,23	0,26	0,21	0,10
b	-0,011	-0,014	-0,005	-0,003	-0,003	-0,006
p-valor	0,12	0,01	0,11	0,26	0,27	0,13
\hat{X}	-0,71	1,31	6,39	15,66	18,93	23,94
$\hat{\kappa}$	0,011	0,014	0,005	0,003	0,002	0,005
$\hat{\sigma}$	0,49	0,77	0,62	0,68	0,62	0,85

Tabela 4.2: Parâmetros Estimados do Modelo OU

Observando inicialmente os valores a e b das regressões e seus respectivos p-valores podemos ver que a série com a regressão mais significativa foi a do vencimento de Janeiro/2022. Mas, analisando o p-valor do coeficiente b das regressões, colocando um limite de 0,15 como aceitável, podemos considerar para o nosso experimento as séries de Janeiro/2020, Janeiro/2022, Julho/2022 e Janeiro/2024.

Olhando agora para os parâmetros estimados do modelo, notamos que os vencimentos de Janeiro/2020 e Janeiro/2022 possuem valores médios de longo prazo próximos de zero, valor de acordo com o esperado baseado na teoria explorada anteriormente neste artigo. O valor médio de longo prazo para o vencimento Jan/20 foi marginalmente negativo. Todos os outros vencimentos mostraram valor médio de longo prazo positivo. Mesmo assim, os dois primeiros vencimentos possuem valores próximos o suficiente da média de longo prazo zero esperada pela teoria. Não só isso, mas esse vencimentos também demonstraram um valor considerável para a variável κ , demonstrando assim uma boa velocidade de reversão à média.

Quando olhamos para os demais vencimentos, observamos que os parâmetros estimados baseados na série histórica existente até o desenvolvimento do presente estudo, não corroboram com a teoria explorada no mesmo. Mais especificamente, os valores estimados para a média de longo prazo \bar{X} da série se encontram bem elevados, indo contra a teoria de que as taxas dos títulos do tipo LTN deveriam andar de acordo com seus respectivos contratos derivativos de mesmo vencimento. Além disso, tais vencimentos demonstraram uma velocidade de

reversão à média muito mais lenta do que os dois primeiros vencimentos analisados.

Um possível motivo para tamanha diferença no modelo se encontra certamente no tamanho das séries analisadas. Não especificamente o número de amostras da série, mas sim o intervalo de tempo no qual as séries foram geradas. As janelas utilizadas para analisar os vencimentos de Janeiro/2020 e Janeiro/2022 foram grandes o suficiente para capturarem diversos momentos ao longo do tempo, possibilitando assim uma série com eventos variados onde eventualmente as LTNs poderiam estar com maior demanda que seus respectivos derivativos, e também outros eventos onde as LTNs estivessem com menor demanda. Se analisarmos o gráfico anterior com todas as séries históricas, é fácil notar que as séries dos vencimentos de Julho/2022 em diante se mostram muito afetadas pelo período entre Janeiro/2020 e Agosto/2021 onde os prêmios das LTNs ficaram muito elevados.

4.3 Avaliação do Modelo

Como mencionado na subseção anterior, as LTNs cujos vencimentos nos permitem analisar a série de dados referente a toda sua vida útil de negociação, nos mostraram valores estimados próximos ao que indicaria a teoria financeira por trás da precificação desses instrumentos. Já nas LTNs com os vencimentos mais longos, estes também com séries mais curtas de dados, não pudemos observar um movimento de reversão a média que era esperado.

Além disso, podemos ver na tabela 4.3 o R^2 das regressões analisadas:

	Jan20	Jan22	Jul22	Jan23	Jul23	Jan24
R^2	0.30%	0.70%	0.30%	0.20%	0.20%	0.50%

Tabela 4.3: Significância das Regressões

Como podemos observar na tabela 4.3, apesar dos coeficientes terem se mostrado significativos para determinados vencimentos, os valores de R^2 se mostraram muito baixos. Isso indica que apesar de coeficientes significativos para explicar a dinâmica da variável analisada, ainda assim os dados apresentam grande ruído em relação à tendência estimada na regressão.

Concluindo, nesta parte do estudo foi possível obter uma regressão em cima das séries de dados analisadas com coeficientes significativos para determinados vencimentos. Feito isso, conseguimos então estimar os parâmetros do Processo de Ornstein-Uhlenbeck que modela os instrumentos analisados. Isso nos permite rodar algoritmos de simulação em cima desses modelos, que simulam em probabilidade os movimentos destes instrumentos nos permitindo assim testar de forma adequada estratégias de negociação dos instrumentos analisados. Devido a maior completude das séries já explicado anteriormente, a partir deste ponto da dissertação, estaremos analisando apenas o instrumento casado de vencimentos em Janeiro de 2020, Janeiro de 2022 e Julho de 2022. No espaço (Ω, \mathcal{F}, P) escrevemos as três dinâmicas, que etimadas, apresentaram melhor aderência:

Vencimento Janeiro/2020:

$$dX_t = 0,011(-0,71 - X_t)dt + 1,47dB_t \quad \forall t \geq 0 \quad (4.1)$$

Vencimento Janeiro/2022:

$$dX_t = 0,014(1,31 - X_t)dt + 2,24dB_t \quad \forall t \geq 0 \quad (4.2)$$

Vencimento Julho/2022:

$$dX_t = 0,005(6,39 - X_t)dt + 1,99dB_t \quad \forall t \geq 0 \quad (4.3)$$

Como podemos observar, substituímos os parâmetros \bar{X} , κ e σ , pelos valores que foram estimados empiricamente a partir das séries históricas.

Capítulo 5

Possibilidades de Estratégias

Neste capítulo procuraremos utilizar a modelagem dos casados de vencimento Jan/20, Jan/22 e Jul/22 para, baseado nos parâmetros estimados, formular estratégias de investimento. Estas estratégias se tratam de um conjunto de regras que determinam o melhor momento de compra e venda do instrumento em questão. Determinadas as regras, testaremos sua eficácia de duas formas distintas:

(i) Calcular a performance teórica da estratégia utilizando os preços históricos do instrumento. Isto é, caso a estratégia tivesse sido implementada no passado, como teria se comportado.

(ii) Baseado em uma simulação de Monte Carlo onde, utilizando as equações 4.1, 4.2 e 4.3, faremos a simulação para gerar um grande número de séries de preços teóricos. Utilizaremos então esse conjunto de séries de preços para calcular o resultado médio da estratégia analisada. Tal método também nos permitirá gerar números estatísticos relevantes para o comportamento da estratégia como: resultado máximo, resultado mínimo e desvio padrão do resultado obtido.

Os exercícios de simulação nesse estudo foram implementados programaticamente utilizando a linguagem de programação Python. A literatura sobre a aplicação de Python em simulações financeiras é vasta. Dentre outras, citamos Caetano (2021) [Cae21] e Shumway & Stoffer (2017) [SS17].

5.1 Analisando as Simulações

Inicialmente, utilizando as equações 4.1, 4.2 e 4.3, foram gerados para cada um dos vencimentos cem diferentes trajetórias de preços diários na janela de um ano (duzentos e cinquenta e dois dias úteis). Todas as séries partiram do preço inicial de zero bps.

Abaixo podemos observar os gráficos gerados:

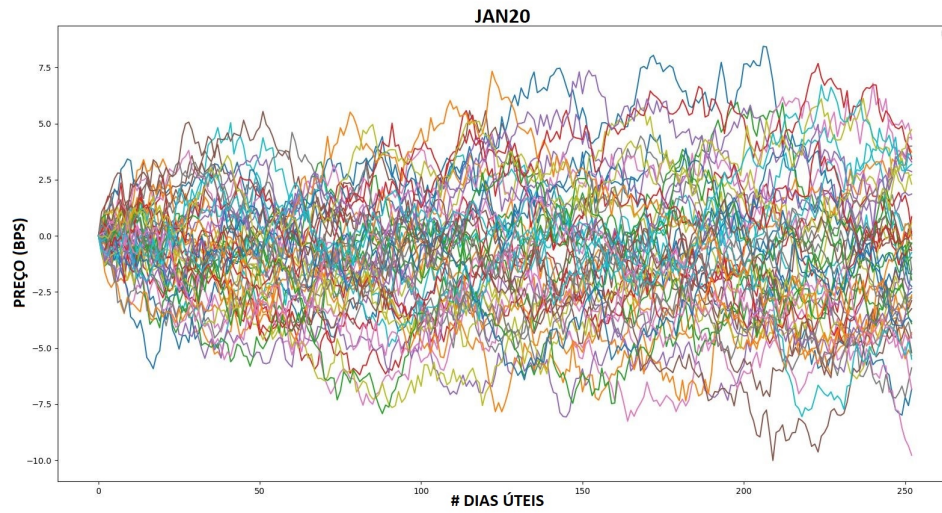


Figura 5.1: Simulações - Casado Jan20

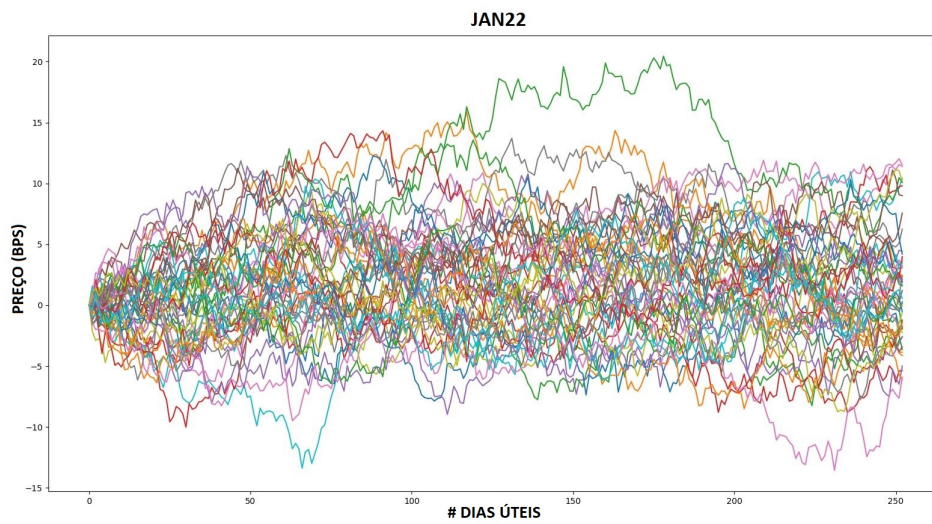


Figura 5.2: Simulações - Casado Jan22

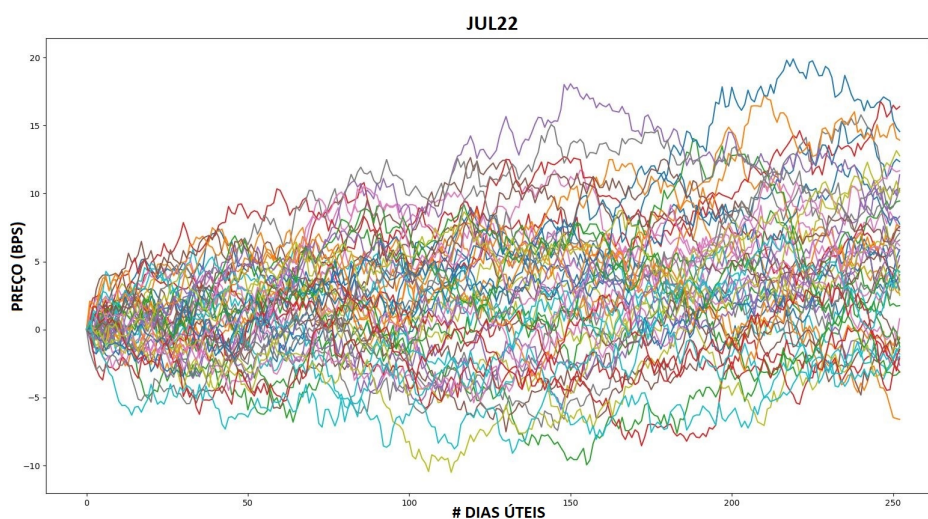


Figura 5.3: Simulações - Casado Jul22

Finalmente, podemos observar na Figura 5.4 as séries médias, obtidas através do valor médio dessa vez de cinco mil simulações geradas para cada vencimento.

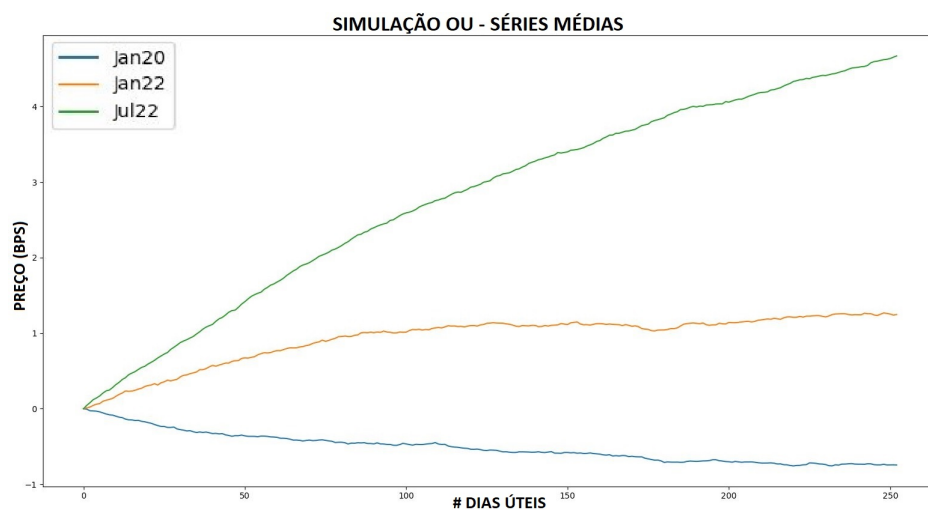


Figura 5.4: Simulações - Séries Médias

Uma vez geradas as simulações, podemos observar na tabela 5.1 as estatísticas que nos permitem conhecer os detalhes do comportamento do preço dos ativos. São elas: média, desvio padrão, valor máximo e valor mínimo. Além disso, analisamos

também a maior trajetória contínua de valorização (maior drawup) e a maior trajetória contínua de desvalorização (maior drawdown).

Vencimento	Média	Desv.Pad.	Máx.	Mín.	Max.Drawdown	Max.Drawup
Jan/2020	-0,51	2,17	13,89	-15,19	-19,43	19,92
Jan/2022	0,93	3,22	22,91	-19,62	-28,28	29,02
Jul/2022	2,79	3,32	27,4	-19,14	-25,27	28,96

Tabela 5.1: Simulações de Preços do Casado

Como era de se esperar, todos os valores médios dos vencimentos analisados se encontram próximos da média de longo prazo dos modelos. Além disso, podemos notar níveis de desvio padrão parecidos para todos os vencimentos, com o vencimento de Jan/2020 se mostrando um pouco menos volátil que os demais. Em relação aos valores máximos e mínimos, importante notar que ambos se mostraram relativamente simétricos em torno de seus respectivos valores médios. E por fim, em relação aos maiores Drawups e Drawdowns, definidos como a maior trajetória contínua observada de valorização e desvalorização do ativo respectivamente, podemos notar que, baseado nas séries analisadas, seus movimentos máximos observados se encontram em torno de 20 a 30 pontos base em módulo. Estas informações apresentadas na tabela 5.1 serão utilizadas na próxima seção, onde desenvolveremos uma estratégia para a negociação do instrumento casado.

5.2 Descrição da Estratégia

A operação executada na estratégia proposta nesse estudo consiste em comprar a LTN (aplicar a taxa) e vender o derivativo (tomar a taxa). Ou seja, iremos vender o casado quando o preço do mesmo estiver acima de seu valor médio de longo prazo e o recompraremos quando este valor se normalizar. Testaremos as estratégias para os três vencimentos analisados. Para implementarmos a estratégia, precisamos definir os pontos de entrada e de saída da posição. Como pontos de entrada, testaremos três diferentes abordagens: venderemos o casado quando este estiver $1x$, $2x$ e $3x$ seu respectivo desvio padrão acima de sua média de longo prazo (observados na tabela 4.2). Já como ponto de saída, também testaremos três abordagens distintas: recompraremos o casado quando este estiver 0,5 desvio padrão abaixo de sua média de longo prazo, quando estiver exatamente na média de longo prazo e quando estiver 0,5 desvio padrão acima da média de

longo prazo.

Testaremos as nove combinações possíveis de ponto de entrada e saída para cada um dos três vencimentos analisados. Para cada combinação, simularemos o resultado da estratégia proposta cinco mil vezes ao longo de um ano, e calcularemos seus respectivos retornos em média (μ) e desvio padrão médio (σ) das séries de resultados. Ao calcularmos μ , como a média dos resultados acumulados das cinco mil simulações, queremos chegar no que seria o valor esperado empírico da estratégia em uma janela de um ano. Já o valor de σ , calculado a partir da média dos desvios padrão obtidos para cada uma das séries de resultado simuladas, nos permite analisar a volatilidade diária de resultado que estas estratégias geraram em média. Com as estatísticas em mãos, analisaremos qual estratégia se mostrou a mais eficiente.

5.3 Análise das Estratégias Contra as Simulações

Após rodadas as simulações explicadas na seção anterior, podemos ver na tabela 5.2 os resultados obtidos para o vencimento Jan/2020:

	Entrada	Saída	#Trades	Preço Entrada	Preço Saída	Result. Médio(μ)	Desvio Pad.(σ)	μ / σ
1	$1 \cdot \sigma$	$-0,5 \cdot \sigma$	0,88	1,76	-2,09	3,34	0,21	15,9
2	$1 \cdot \sigma$	$0 \cdot \sigma$	1,25	1,76	-0,99	3,25	0,22	14,8
3	$1 \cdot \sigma$	$0,5 \cdot \sigma$	2,02	1,76	0,09	3,05	0,22	13,9
4	$2 \cdot \sigma$	$-0,5 \cdot \sigma$	0,32	3,96	-2,10	1,95	0,09	21,7
5	$2 \cdot \sigma$	$0 \cdot \sigma$	0,41	3,96	-0,99	2,05	0,10	20,5
6	$2 \cdot \sigma$	$0,5 \cdot \sigma$	0,52	3,96	0,10	2,02	0,11	18,4
7	$3 \cdot \sigma$	$-0,5 \cdot \sigma$	0,08	6,15	-2,10	0,68	0,02	34
8	$3 \cdot \sigma$	$0 \cdot \sigma$	0,11	6,15	-0,99	0,79	0,03	26,3
9	$3 \cdot \sigma$	$0,5 \cdot \sigma$	0,13	6,15	0,08	0,81	0,04	20,3

Tabela 5.2: Simulações de Estratégias - Jan/2020

Na Tabela 5.3, podemos ver os resultados obtidos para o vencimento Jan/2022:

	Entrada	Saída	#Trades	Preço Entrada	Preço Saída	Result. Médio(μ)	Desvio Pad.(σ)	μ / σ
1	$1 \cdot \sigma$	$-0,5 \cdot \sigma$	0,85	4,98	-0,76	4,84	0,30	16,1
2	$1 \cdot \sigma$	$0 \cdot \sigma$	1,21	4,99	0,85	4,80	0,31	15,5
3	$1 \cdot \sigma$	$0,5 \cdot \sigma$	1,94	4,98	2,47	4,49	0,31	14,5
4	$2 \cdot \sigma$	$-0,5 \cdot \sigma$	0,29	8,20	-0,76	2,66	0,12	22,2
5	$2 \cdot \sigma$	$0 \cdot \sigma$	0,38	8,21	0,85	2,83	0,14	20,2
6	$2 \cdot \sigma$	$0,5 \cdot \sigma$	0,47	8,21	2,47	2,74	0,14	19,6
7	$3 \cdot \sigma$	$-0,5 \cdot \sigma$	0,07	11,46	-0,74	0,81	0,03	27
8	$3 \cdot \sigma$	$0 \cdot \sigma$	0,09	11,45	0,83	0,93	0,04	23,3
9	$3 \cdot \sigma$	$0,5 \cdot \sigma$	0,11	11,45	2,49	0,97	0,04	24,3

Tabela 5.3: Simulações de Estratégias - Jan/2022

Na Tabela 5.4, podemos ver os resultados obtidos para o vencimento Jul/2022:

	Entrada	Saída	#Trades	Preço Entrada	Preço Saída	Result. Médio(μ)	Desvio Pad.(σ)	μ / σ
1	$1 \cdot \sigma$	$-0,5 \cdot \sigma$	0,21	9,99	4,40	1,14	0,06	19
2	$1 \cdot \sigma$	$0 \cdot \sigma$	0,33	9,99	6,02	1,23	0,08	15,38
3	$1 \cdot \sigma$	$0,5 \cdot \sigma$	0,58	10,00	7,64	1,10	0,10	11
4	$2 \cdot \sigma$	$-0,5 \cdot \sigma$	0,04	13,31	4,36	0,39	0,01	39
5	$2 \cdot \sigma$	$0 \cdot \sigma$	0,07	13,30	6,02	0,51	0,02	25,5
6	$2 \cdot \sigma$	$0,5 \cdot \sigma$	0,10	13,29	7,64	0,56	0,03	18,67
7	$3 \cdot \sigma$	$-0,5 \cdot \sigma$	0,005	16,67	4,27	0,06	0,002	30
8	$3 \cdot \sigma$	$0 \cdot \sigma$	0,01	16,54	5,96	0,09	0,003	30
9	$3 \cdot \sigma$	$0,5 \cdot \sigma$	0,01	16,53	7,65	0,12	0,004	30

Tabela 5.4: Simulações de Estratégias - Jul/2022

Podemos observar também, nas figuras 5.5, 5.6 e 5.7, os gráficos das séries de resultado médio para cada uma das nove estratégias testadas, para os vencimentos Jan/2020, Jan/2022 e Jul/2022 respectivamente:

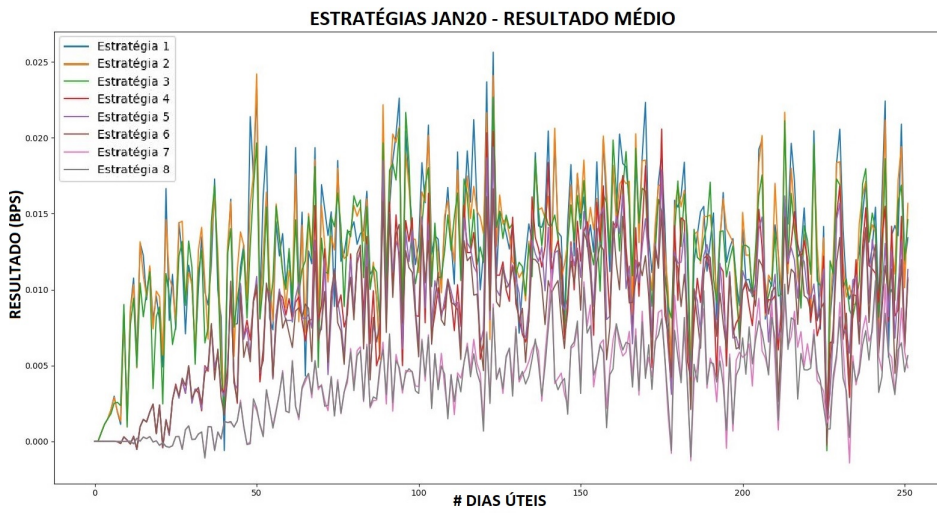


Figura 5.5: Simula\u00e7\u00f5es - S\u00e9ries Resultado M\u00e9dio - Jan/2020

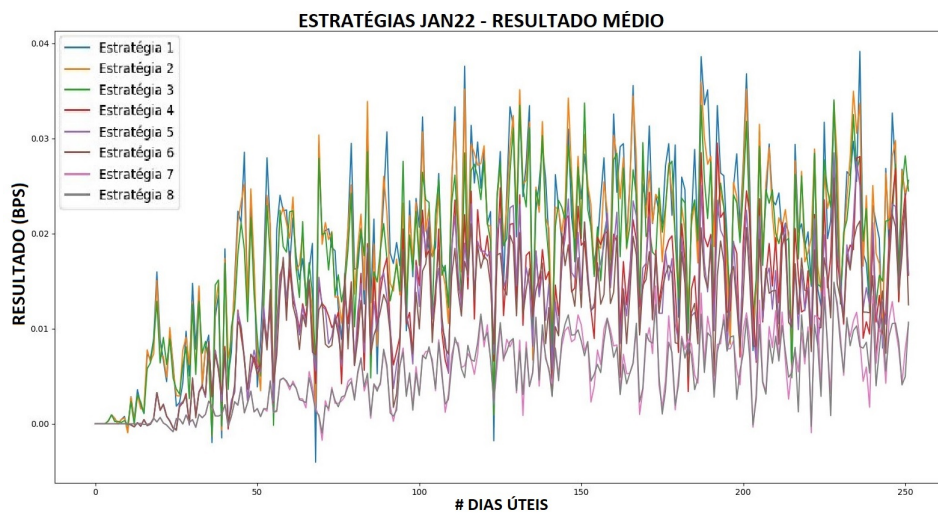


Figura 5.6: Simula\u00e7\u00f5es - S\u00e9ries Resultado M\u00e9dio - Jan/2022

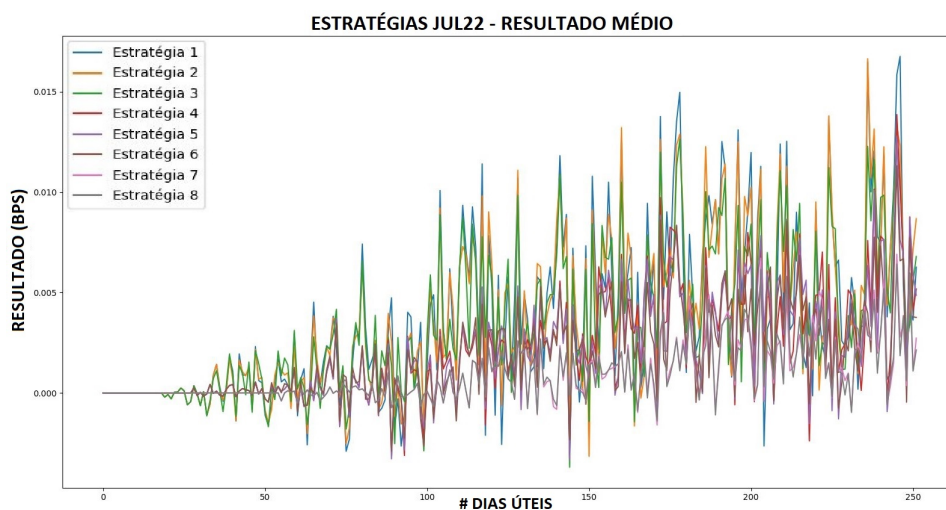


Figura 5.7: Simulações - Séries Resultado Médio - Jul/2022

Analisando os dados nas tabelas 5.2, 5.3, e 5.4, nota-se que, para todos os vencimentos analisados, como era de se esperar, quanto menos rigorosos os critérios de entrada e saída, maior foi o número de operações realizadas ao longo das séries de um ano. Ou seja, a estratégia (3), que vende o ativo casado quando o preço estiver 1 desvio padrão acima da média de longo prazo, e recompra quando o preço cai para 0,5 desvio padrão da média se mostrou a estratégia com o maior número de operações realizadas. Porém, um maior número de operações não se traduziu em um maior resultado. As estratégias de maiores resultados para os vencimentos Jan/2020, Jan/2022 e Jul/2022 foram, respectivamente as estratégias (1), (1) e (2).

Pode-se notar também que, para o vencimento de Jul/2022 tivemos, para todas as estratégias analisadas, um número de operações realizadas consideravelmente menor que os demais vencimentos. Isso se dá pelo fato do modelo do vencimento em questão possuir o valor médio de longo prazo mais distante do valor zero (ponto de partida das simulações) além de uma velocidade de reversão a média menor que os demais.

Outro ponto interessante a analisar é o fato de todas as estratégias terem apresentado resultado médio positivo com o vencimento Janeiro/2022 se mostrando o mais lucrativo. Os resultados se mostraram todos positivos pois, se tratando de uma estratégia que vende o ativo acima de seu preço médio de longo prazo e o recompra abaixo do seu preço médio de longo prazo, naturalmente apresentará um valor esperado positivo, se aplicada a um ativo que apresente reversão à média. Ao mesmo tempo, o resultado vem exatamente do fator volatilidade da

modelagem do ativo (observado na tabela 4.2), que causa variações de preço para um ponto diferente da média de longo prazo e permite então eventualmente a reversão do preço à média. Isto explica o porquê do vencimento Jan/2022 ter apresentado os melhores resultados, uma vez que o modelo do casado deste vencimento foi o que apresentou a maior volatilidade para o preço do ativo. Por esse mesmo motivo, as estratégias de operação aplicadas ao vencimento Jan/2022 apresentaram também a maior volatilidade na série de resultado.

Se analisarmos a métrica de resultado ajustado ao risco (μ/σ), temos que as melhores estratégias para os três vencimentos foram as de número (7), (7) e (4), respectivamente. Isso nos mostra que, apesar de no absoluto as estratégias menos rigorosas se mostrarem mais lucrativas, elas trazem junto um maior risco por resultado marginal. Logo, temos uma perda de eficiência na estratégia, conforme somos menos exigentes com os pontos de entrada e saída das mesmas.

Para entendermos melhor como funcionaria a estratégia, abaixo ilustramos um exemplo de operações baseado nas simulações. Usaremos a estratégia 3 do vencimento Janeiro/2020. Nela, foram realizadas 2,02 operações. Arredondaremos para duas operações realizadas, onde foi vendido o instrumento casado quando o preço deste se encontrava em 1,76 bps e o ativo foi recomprado quando o preço atingiu 0,09 bps. Vamos supor que as operações foram todas do tipo daytrade, ou seja, a posição era montada e desmontada no mesmo dia, quando faltavam 252 dias úteis para o vencimento dos ativos. Vamos supor então que a taxa do DI Futuro de 1 dia era 10,0% a.a. e a taxa da LTN era de 10,0176% a.a.. Montamos então a operação, e posteriormente, mas no mesmo dia, a taxa do derivativo se mantém a 10,0% a.a. e a taxa do título se normaliza para 10,0009% a.a.. Nesse momento, zeramos a operação. O resultado do derivativo nesse caso foi zero e o resultado R_{LTN} da operação da LTN foi:

$$\frac{1.000}{(1, 100009)^{(252/252)}} - \frac{1.000}{(1, 100176)^{(252/252)}} = 0, 14$$

Ou seja, para cada LTN vendida, no valor de R\$909, 08 a operação rendeu R\$0, 14. Um rendimento de 0, 0152% no período. Se conseguirmos realizar essa operação duas vezes no período de um ano, nosso resultado será o dobro do valor calculado, ou seja, R\$0, 28, ou 0, 03% a.a., mesmo resultado observado na tabela 5.2.

5.4 Análise das Estratégias Contra a Série Histórica

Nesta parte, para cada um dos três vencimentos, foram testadas as nove combinações diferentes de estratégias da seção anterior agora contra as séries históricas de preços que originaram os parâmetros dos modelos. Da mesma forma, os resultados são descritos nas tabelas (5.5), (5.6) e (5.7).

Na tabela 5.5 vemos os resultados obtidos para o vencimento Jan/2020:

	Entrada	Saída	#Trades	Preço Entrada	Preço Saída	Result. Médio(μ)	Desvio Pad.(σ)	μ / σ
1	$1 \cdot \sigma$	$-0,5 \cdot \sigma$	2	1,81	-2,39	3,28	0,21	15,6
2	$1 \cdot \sigma$	$0 \cdot \sigma$	2	1,81	-2,02	2,54	0,20	12,7
3	$1 \cdot \sigma$	$0,5 \cdot \sigma$	4	1,68	-0,78	4,75	0,19	25
4	$2 \cdot \sigma$	$-0,5 \cdot \sigma$	0			0	0	
5	$2 \cdot \sigma$	$0 \cdot \sigma$	0			0	0	
6	$2 \cdot \sigma$	$0,5 \cdot \sigma$	0			0	0	
7	$3 \cdot \sigma$	$-0,5 \cdot \sigma$	0			0	0	
8	$3 \cdot \sigma$	$0 \cdot \sigma$	0			0	0	
9	$3 \cdot \sigma$	$0,5 \cdot \sigma$	0			0	0	

Tabela 5.5: Estratégias Contra Série Histórica - Jan/2020

Na Tabela 5.6, podemos ver os resultados obtidos para o vencimento Jan/2022:

	Entrada	Saída	#Trades	Preço Entrada	Preço Saída	Result. Médio(μ)	Desvio Pad.(σ)	μ / σ
1	$1 \cdot \sigma$	$-0,5 \cdot \sigma$	2	4,78	-1,65	12,85	0,29	44,3
2	$1 \cdot \sigma$	$0 \cdot \sigma$	2	4,78	0,89	7,76	0,27	28,7
3	$1 \cdot \sigma$	$0,5 \cdot \sigma$	2	4,78	1,24	7,08	0,27	26,2
4	$2 \cdot \sigma$	$-0,5 \cdot \sigma$	1	7,85	-0,98	8,83	0,25	35,6
5	$2 \cdot \sigma$	$0 \cdot \sigma$	1	7,85	0,57	7,28	0,25	29,1
6	$2 \cdot \sigma$	$0,5 \cdot \sigma$	1	7,85	0,57	7,28	0,25	29,1
7	$3 \cdot \sigma$	$-0,5 \cdot \sigma$	1	11,04	-0,98	12,02	0,23	52,3
8	$3 \cdot \sigma$	$0 \cdot \sigma$	1	11,04	0,57	10,47	0,23	45,5
9	$3 \cdot \sigma$	$0,5 \cdot \sigma$	1	11,04	0,57	10,47	0,23	45,5

Tabela 5.6: Estratégias Contra Série Histórica - Jan/2022

Na Tabela 5.7, podemos ver os resultados obtidos para o vencimento Jul/2022:

	Entrada	Saída	#Trades	Preço Entrada	Preço Saída	Result. Médio(μ)	Desvio Pad.(σ)	μ / σ
1	$1 \cdot \sigma$	$-0,5 \cdot \sigma$	1	10,36	4,65	5,71	0,43	13,3
2	$1 \cdot \sigma$	$0 \cdot \sigma$	1	10,36	6,13	4,23	0,43	9,8
3	$1 \cdot \sigma$	$0,5 \cdot \sigma$	1	10,36	8	2,36	0,43	5,5
4	$2 \cdot \sigma$	$-0,5 \cdot \sigma$	1	14	4,65	9,35	0,43	22,3
5	$2 \cdot \sigma$	$0 \cdot \sigma$	1	14	6,13	7,87	0,42	18,7
6	$2 \cdot \sigma$	$0,5 \cdot \sigma$	1	14	8	6	0,42	14,3
7	$3 \cdot \sigma$	$-0,5 \cdot \sigma$	1	16,49	4,65	11,84	0,42	28,2
8	$3 \cdot \sigma$	$0 \cdot \sigma$	1	16,49	6,13	10,36	0,41	25,3
9	$3 \cdot \sigma$	$0,5 \cdot \sigma$	1	16,49	8	8,49	0,41	20,7

Tabela 5.7: Estratégias Contra Série Histórica - Jul/2022

A primeira questão que podemos observar é que, utilizando a série histórica de preços do casado de vencimento Janeiro/2020, as estratégias 4 a 9 não teriam resultado em nenhuma operação realizada. Isso ocorre, pois para a janela de dados analisada, o ativo em questão não teve seu preço atingindo o nível de dois desvios-padrão acima de sua média de longo prazo. Mas, das estratégias 1 a 3, todas realizaram operações e conseqüentemente geraram resultado positivo. A estratégia 3 novamente foi a que se mostrou mais rentável, uma vez que permitiu que um maior número de operações fosse realizado.

Para o vencimento Janeiro/2022, a estratégia de melhor resultado foi a estratégia número 1. As três primeiras estratégias conseguiram realizar um maior número de operações (duas operações). Dentre elas, a que possuía o ponto de saída mais rigoroso acabou tendo um melhor resultado. Todas as estratégias mostraram um desvio-padrão parecido.

Para o vencimento Julho/2022, a estratégia de melhor resultado foi a estratégia número 8. Todas as estratégias conseguiram realizar apenas uma operação. Logo, a estratégia 8, que possui pontos de entrada e saída bem rigorosos se comparada com as demais, mostrou o melhor resultado. Todas as estratégias mostraram um desvio-padrão parecido.

Da mesma forma que nas simulações, todas as operações mostraram resultado positivo. Além disso, analisando as estratégias 1 a 3, para todos os vencimentos,

conseguimos realizar algumas operações quando o preço se encontrava um desvio-padrão acima da média de longo prazo, e, como era de se esperar pelo modelo, esse preço se normalizou em determinado momento, nos permitindo lucrar com o movimento. Vale mencionar que, diferente do teste de cinco mil simulações, aqui estamos analisando apenas uma trajetória de preço. Logo, apesar do valor simbólico de constatarmos que teríamos tido lucro no passado com as estratégias, o resultado desse teste acaba tendo uma menor relevância que o teste da seção anterior.

Se analisarmos a métrica de resultado ajustado ao risco (μ/σ), temos que as melhores estratégias para os três vencimentos foram as de número (3), (7) e (7), respectivamente. Da mesma forma que no caso das simulações, isso nos mostra que, apesar de no absoluto as estratégias menos rigorosas se mostraram mais lucrativas, elas trazem junto um maior risco por resultado marginal. Logo, temos uma perda de eficiência na estratégia, conforme somos menos exigentes com os pontos de entrada e saída das mesmas.

Capítulo 6

Conclusões

Como antecipado na Introdução, neste estudo exploramos as características individuais dos títulos públicos do tipo bullet pré-fixado denominado LTN e dos contratos futuros de DI de 1 dia. Analisamos as especificações de ambos, suas diferenças e similaridades. A partir daí, foi possível argumentar que o instrumento casado, que opera ambos os ativos em conjunto, poderia ser modelado por um processo de reversão à média.

A partir desse ponto, analisamos as séries históricas de preços dos casados que estão em negociação no mercado no período tratado neste estudo. Foi utilizado então o Processo de Reversão a Média de Ornstein-Uhlenbeck para modelar os ativos analisados. De todos os vencimentos analisados, as regressões realizadas em três vencimentos específicos demonstraram um bom nível de significância estatística. Foram eles os vencimentos: Janeiro/2020, Janeiro/2022 e Julho/2022. Além disso, estes foram vencimentos com janelas mais completas de preços e menos influenciadas por um período de grande distorção de preços que foi entre Março/2020 e Agosto/2021. As regressões nos permitiram então estimar os parâmetros κ , \bar{X} , e σ do processo de Ornstein-Uhlenbeck e assim, estimar o que seriam as dinâmicas de preços observadas. Para estudos futuros, recomendamos a implementação do Processo de Ornstein-Uhlenbeck com saltos, por possivelmente se adaptar melhor a momentos pontuais de maior volatilidade.

Para os três vencimentos cujas regressões se mostraram significativas, foram propostas diferentes combinações de pontos de entrada e pontos de saída para operações que vendem o casado quando este se descola muito de sua média de longo prazo e o recompra quando o preço se normaliza. As estratégias foram avaliadas utilizando dois métodos distintos: o primeiro, através de um processo de simulação de Monte Carlo, onde testamos as estratégias contra cinco mil

simulações utilizando os parâmetros de Ornstein-Uhlenbeck que haviam sido estimados. O segundo método de teste foi analisar contra as séries históricas dos preços dos ativos casados com dados extraídos do mercado de balcão de títulos públicos.

Os resultados das simulações de estratégias se mostraram bem sucedidos. Todas as estratégias mostraram valor médio de resultado positivo e consideravelmente maior do que suas respectivas volatilidades. Dentre as estratégias propostas, as menos rigorosas com o ponto de entrada se mostraram mais bem sucedidas, pois permitiram um maior número de operações realizadas nas janelas analisadas. Ao mesmo tempo, para um mesmo ponto de entrada, pontos de saída mais rigorosos acabaram gerando um melhor resultado final.

Conseguimos desenvolver aqui uma forma sistemática de identificação de que o preço do ativo em questão está muito distorcido de seu preço de equilíbrio e, com isso, geramos possibilidades reais de ganho. Trata-se de uma estratégia de operação com pouco risco de perda envolvido. Alguma volatilidade ao longo do caminho do *trade* pode ser gerada mas, no longo prazo, os ativos operados tendem a retornar a sua média de longo prazo. Trata-se de uma operação baseada em dados reais, cuja operacionalização se mostra totalmente factível no dia-a-dia real no mercado financeiro. Desta forma, consegue-se obter ganhos aproveitando as distorções de mercado.

Referências Bibliográficas

- [Aiu13] Fernando Antonio Lucena Aiube. *Modelos quantitativos em finanças com enfoque em commodities*. Bookman Editora, 2013.
- [Ber15] Paulo Lamosa Berger. *Mercado de Renda Fixa no Brasil: ênfase em Títulos Públicos*. Editora Interciência, 2015.
- [Cae21] M.A.L. Caetano. *Python e mercado financeiro: Programação para estudantes, investidores e analistas*. Editora Blucher, 2021.
- [Cox85] Ingerson e Ross Cox. *Theory of the term structure of interest rates*. Econometrica, 1985.
- [Das94] Satyajit Das. *Swap Derivative Financing: The Global Reference to Products, Pricing, Applications and Markets*. Probus Pub Co, 1994.
- [Día04] E. Díaz A. e Navarro. *Spanish Treasury Bond Market Liquidity and Volatility Pré and Post-European Monetary Union*. JEL, 2004.
- [Die06] Canlin, Diebold F. X. e Li. *Forecasting the term structure of government bond yields*. Journal of Econometrics, 2006.
- [Elt01] C. Elton E. J. e Green. *Economic News and Bond Prices: Evidence from the U.S. Treasury Market*. The Journal of Financial e Quantitative Analysis, 2001.
- [Fle97] M. J Fleming. *The Round-the-Clock Market for U.S. Treasury Securities*. Federal Reserve Bank of New York. Economic Policy Review, 1997.
- [Gar77] I Garbade K. D. e Rosey. *Secular Variation in the Spread between Bid and Offer Prices on U.S. Treasury Coupon Issues*. Business Economics, 1977.
- [Gar94] Eduarda Garcia Marcio G. P. e de la Roque. *O mercado futuro de taxa de juros no Brasil: Especificidades teóricas e empíricas do mercado de DI-futuro*. Texto para discussão, No. 318, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), 1994.
- [Hig01] Desmond J. Higham. “An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations”. Em: (2001).

- [Ho86] S-B. Ho T. S. Y. e Lee. *Term structure movements and pricing interest rate contingent claims*. The Journal of Finance, 1986.
- [Hul16] John C. Hull. *Options, futures, and other derivatives*. 9. ed. Pearson Prentice Hall, 2016.
- [Hul90] A. Hull J. e White. *Pricing interest rate derivative securities*. The Review of Financial Studies, 1990.
- [Jac96] Martin Jacobsen. “Laplace and the origin of the Ornstein±Uhlenbeck process”. Em: (1996).
- [Mar03] L. Martellini. *Fixed-Income Securities*. Wiley Finance, 2003.
- [Men91] Henry Mendelson. *Liquidity, maturity, and the yields on U.S. Treasury securities*. Journal of Finance, 1991.
- [Nel87] A. F. Nelson C. R. e Siegel. *Parsimonious modeling of yield curves*. Journal of Business, 1987.
- [Øks14] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications (Universitext)*. 6th. Springer, 2014.
- [Pix14] Romeu Pixiolini. *Geração de cenários de Estresse para a Curva de Juros Brasileira*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2014.
- [Rem99] E. M Remolona. *Price Formation and liquidity in the U.S. Treasury Market: The Response to Public Information*. Journal of Finance, 1999.
- [Shr04] Steven E Shreve. *Stochastic calculus for finance 2, Continuous-time models*. Springer, 2004.
- [SS17] Robert H Shumway e David S Stoffer. *Time series analysis and its applications: with R examples*. Springer, 2017.
- [Ste12] John M. Steele. *Stochastic calculus and financial applications*. Springer Science Business Media, 2012.
- [Sve94] L. E. O. Svensson. *Estimating and interpreting forward interest rates*. National Bureau of Economic Research, 1994.
- [Tan71] e Kochin Tanner J. E. *The Determinants of the Difference between Bid and Ask Prices on Government Bonds*. Journal of Business, 1971.
- [Ton11] Daniel Tonholo. *A estrutura a termo de taxas de juros brasileira do ponto de vista dos processos estocásticos*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2011.
- [Vas77] O. Vasicek. *An equilibrium characterization of the term structure*. Journal of Financial Economics, 1977.

Apêndice A

Solução da EDE do Processo de Ornstein-Uhlenbeck

Nesta seção complementar, detalharemos os cálculos necessários para se chegar na solução da EDE do processo de Ornstein-Uhlenbeck. Calcularemos também as fórmulas para o valor esperado, a variância e a covariância da solução.

Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade, partimos inicialmente da equação (3.1) que detalha a dinâmica do ativo em um processo de reversão à média de Ornstein-Uhlenbeck:

$$dX_t = \kappa(\bar{X} - X_t)dt + \sigma dB_t \quad \forall t \geq 0, X_0 = x$$

Desenvolvendo um pouco a equação (3.1) obtemos:

$$\begin{aligned}dX_t &= \kappa\bar{X}dt - \kappa X_t dt + \sigma dB_t \\dX_t + \kappa X_t dt &= \kappa\bar{X}dt + \sigma dB_t \\e^{\kappa t} dX_t + \kappa e^{\kappa t} X_t dt &= \kappa e^{\kappa t} \bar{X} dt + \sigma e^{\kappa t} dB_t\end{aligned}$$

Podemos notar que o lado esquerdo da equação pode ser representado como a derivada de $e^{\kappa t} X_t$, obtendo então a equação:

$$d(e^{\kappa t} X_t) = \kappa e^{\kappa t} \bar{X} dt + \sigma e^{\kappa t} dB_t$$

Integramos então dos dois lados para obter:

$$\int_0^T d(e^{\kappa t} X_t) = \int_0^T \kappa e^{\kappa t} \bar{X} dt + \int_0^T \sigma e^{\kappa t} dB_t$$

$$e^{\kappa T} X_T - e^0 X_0 = \kappa \bar{X} \frac{e^{\kappa T} - e^0}{\kappa} + \sigma \int_0^T e^{\kappa t} dB_t$$

Podemos então desenvolver a equação anterior da seguinte forma:

$$X_T - X_0 e^{-\kappa T} = X(1 - e^{-\kappa T}) + \sigma e^{-\kappa T} \int_0^T e^{\kappa t} dB_t$$

$$X_T = X_0 e^{-\kappa T} + X(1 - e^{-\kappa T}) + \sigma \int_0^T e^{-\kappa(T-t)} dB_t$$

Chegando finalmente à solução da EDE:

$$X_t = \bar{X} + (X_0 - \bar{X})e^{-\kappa t} + \sigma \int_0^t e^{\kappa(u-t)} dB_u$$

A partir da solução apresentada, calculamos agora $E^P[X_t]$. Podemos facilmente notar que o valor esperado do último termo da equação é igual a zero. Ou seja:

$$E^P\left[\sigma \int_0^t e^{\kappa(u-t)} dB_u\right] = 0$$

Logo, temos que:

$$E^P[X_t] = E^P[\bar{X} + (X_0 - \bar{X})e^{-\kappa t}] = \bar{X} + (X_0 - \bar{X})e^{-\kappa t}$$

A partir daí, podemos por fim calcular a variância de X_t como:

$$Var^P[X_t] = E[(X_t - E[X_t])^2]$$

$$Var^P[X_t] = E\left[\left(\sigma \int_0^t e^{\kappa(u-t)} dB_u\right)^2\right]$$

Pela isometria de Itô, chegamos a:

$$Var^P[X_t] = \sigma^2 \int_0^t e^{-2\kappa(t-u)} du$$

$$Var^P[X_t] = \sigma^2 \frac{e^0 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa}$$

Chegando finalmente a:

$$Var^P[X_t] = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})$$

Por fim, partiremos novamente da solução da EDE para calcular a covariância entre a variável aleatória em um momento T e a variável aleatória em um momento S . Temos que:

$$C^P[X_T, X_S] = E^P[(X_T - E^P[X_T])(X_S - E^P[X_S])]$$

Substituindo os valores de X e do valor esperado de X , chegamos na equação abaixo:

$$C^P[X_T, X_S] = E[\sigma \int_0^T e^{-\kappa(T-t)} dB_t \cdot \sigma \int_0^S e^{-\kappa(S-u)} dB_u]$$

Tirando os valores determinísticos do valor esperado, temos:

$$C^P[X_T, X_S] = \sigma^2 e^{-\kappa(S+T)} E[\int_0^T e^{\kappa t} dB_t \cdot \int_0^S e^{\kappa u} dB_u]$$

Desenvolvendo mais a equação:

$$\begin{aligned} C^P[X_T, X_S] &= \sigma^2 e^{-\kappa(S+T)} \int_0^S e^{2\kappa u} du \\ C^P[X_T, X_S] &= \sigma^2 e^{-\kappa(S+T)} \frac{e^{2\kappa S} - 1}{2\kappa} \\ C^P[X_T, X_S] &= \frac{\sigma^2}{2\kappa} (e^{-\kappa(S+T)+2\kappa S} - e^{-\kappa(S+T)}) \\ C^P[X_T, X_S] &= \frac{\sigma^2}{2\kappa} (e^{-\kappa(T-S)} - e^{-\kappa(S+T)}) \end{aligned}$$

Por fim, no modo genérico de forma que independa de $T > S$ temos:

$$C^P[X_T, X_S] = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (e^{-\kappa|T-S|} - e^{-\kappa(S+T)})$$