O PRINCÍPIO DAS GAVETAS

Paulo Cezar Pinto Carvalho

Muitos problemas atraentes de matemática elementar exploram relações entre conjuntos finitos, expressas em linguagem coloquial. Parte de sua atração vem justamente do fato de que podem ser formulados e, muitas vezes, resolvidos sem recorrer a fórmulas ou a técnicas complicadas. Vejamos um exemplo simples.

Exemplo 1. Qual é o número mínimo de pessoas que devemos reunir para que tenhamos certeza de que entre elas há duas que fazem aniversário no mesmo mês?

Solução: A resposta é 13. Se houvesse apenas 12 pessoas, seria possível que cada uma delas fizesse aniversário em um mês diferente. Com 13 pessoas, há , obrigatoriamente, pelo menos um mês com mais de um aniversário (se houvesse, no máximo, um aniversário por mês, o número de pessoas presentes seria, no máximo, 12).

O argumento empregado acima é conhecido como *Princípio das Gavetas de Dirichlet* ou *Princípio das Casas do Pombos*. Um possível enunciado para este princípio é o seguinte:

Se n objetos forem colocados em, no máximo, $n - 1$ gavetas, então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.

(Uma maneira um pouco mais formal de dizer o mesmo é: *se o número de elementos de um conjunto finito* A *é maior do que o número de elementos de um outro conjunto* B*, então uma função de* A *em* B *não pode ser injetiva*.)

Prova: Seja m o número de gavetas e n o de objetos, com $m < n$. Sejam $x_1, x_2, ..., x_m$ a quantidade de objetos em cada gaveta. O número total de objetos é $x_1 + x_2 + ...+ x_m = n$. Se houver no máximo um objeto em cada gaveta, isto é, se tivermos $x_i <= 1$ para todo i, então $x_1 + x_2 + ...+ x_m$ será menor ou igual a m, ou seja, $n \leq m$, o que contradiz a hipótese de que haja mais objetos do que gavetas.

O mesmo argumento permite demonstrar a seguinte generalização: Se n objetos são colocados em m gavetas e $n > mk$ (onde m, n e k são números naturais) então alguma gaveta conterá pelo menos $k + 1$ objetos.

Embora trate-se de um fato extremamente elementar, o Princípio das Gavetas é útil para resolver problemas que, pelo menos à primeira vista, não são imediatos. Para aplicá-lo, devemos identificar, na situação dada, quem faz o papel dos objetos e quem faz o papel das gavetas.

Exemplo 2. Uma prova de concurso possui 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas cada. Qual é o menor número de candidatos para o qual podemos garantir que pelo menos dois deles deram exatamente as mesmas respostas para todas as questões?

Solução: Neste caso, os objetos são os alunos e as gavetas são as possíveis seqüências de respostas . Como cada questão pode ser respondida de 5 modos, a prova pode ser preenchida de $5 \times 5 \times 5 \times \ldots 5 = 5^{10} = 9\,765\,625$ modos. Logo, só se pode ter a certeza de que dois candidatos fornecem exatamente as mesmas respostas se houver pelo menos 9 765 626 candidatos.

Exemplo 3. Em uma reuniao há n pessoas. Mostre que existem duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de outros participantes (admitimos que "conhecer"seja uma relação simétrica, ou seja, se a conhece b, então b conhece a).

Solução: Os objetos são as pessoas. As gavetas, naturalmente, são as quantidades de pessoas conhecidas. Temos, no entanto, uma dificuldade: as possíveis quantidades de conhecidos são 0, 1, 2, …, $n-1$. Assim, à primeira vista, temos n gavetas para n objetos, o que nos impede de usar o princípio das gavetas. Note, porém, que as gavetas 0 e $n-1$ não podem ser usadas simultaneamente: se existir uma pessoa que não conhece nenhum participante, então não pode existir um participante que conheça todos! Assim, uma das gavetas 0 ou $n-1$ permanece desocupada e os n objetos devem ser, portanto, distribuídos em $n-1$ gavetas. Portanto, uma delas será ocupada por pelo menos dois objetos, o que mostra que há duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de participantes.

Nos casos anteriores, foi bastante simples identificar as gavetas. Nem sempre é assim. Os exemplos a seguir ilustram situações em que é necessário "construir" as gavetas a serem usadas.

Exemplo 4: Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a $\sqrt{2}$.

Solução: Neste caso, está claro que os objetos são os 5 pontos. O ponto chave da resolução está na identificação das gavetas. Devemos subdividir o quadrado dado em 4 partes de modo tal que a distância entre dois pontos situados em uma destas partes nunca seja maior que $\sqrt{2}$. A Fig. 1 mostra como fazê-lo: basta dividi-lo nos quatro quadrados determinados pelas retas que unem os pontos médios dos lados opostos. Em cada uma destas quatro "gavetas", a distância máxima entre dois pontos é igual à sua diagonal, que mede $\sqrt{2}$. Portanto, dados 5 pontos, pelo menos 2 estarão em uma mesma "gaveta" e, assim, determinam um segmento de comprimento menor ou igual a $\sqrt{2}$.

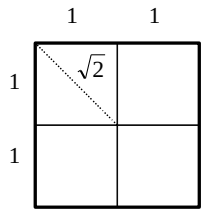

Figura 1

Exemplo 5. Mostre que todo inteiro positivo n tem um múltiplo que se escreve apenas com os algarismos 0 e 1.

Solução. Considere os $n+1$ primeiros números da sequência 1, 11, 111,... . Divida-os por n e considere os restos dessas divisões. Esses restos só podem ser iguais 0; 1; 2; ... ; $n-1$. Pensando nos números como objetos e nos restos como gavetas, temos mais objetos do que gavetas. O Princípio das Gavetas assegura que alguma gaveta receberá mais de um objeto, isto é, há dois números na sequência que dão o mesmo resto quando divididos por n, digamos 11 ... 1 (p algarismos) e 11 ... 1 (q algarismos), $p < q$. A diferença desses números é um múltiplo de n e se escreve 11 ... 10 ... 0, com p algarismos 0 e $q-p$ algarismos 1.

Exemplo 6. Escolha 101 números dentre os elementos do conjunto {1, 2, 3, …, 200}. Mostre que, dentre os números escolhidos, há sempre dois números tais que um divide o outro.

Solução: Antes de mais nada, observe que podemos escolher 100 números do conjunto sem que exista um par onde um número divide o outro: basta tomar os números 101, 102, …, 200. É claro que se acrescentamos mais um número p (obrigatoriamente menor ou igual a 100) a essa coleção, um múltiplo seu já estará lá. Na verdade, podemos garantir que esse múltiplo é da forma $2^r p$ (basta tomar p e multiplicá-lo sucessivamente por 2 até que ele se torne maior do que 100).
Mostraremos que isso ocorre para qualquer conjunto de 101 elementos. Ou seja, *todo subconjunto com* 101 *dos números de* 1 *a* 200 *sempre contém um número e um múltiplo seu obtido através de multiplicação por uma potência de* 2. Note que esta afirmativa é mais **forte** do que a dada do enunciado, mas, como veremos, nos permite estruturar uma demonstração. Isto ocorre com frequência nos problemas envolvendo o Princípio das Gavetas: parte do sucesso nas soluções depende da habilidade em perceber o que deve ser demonstrado. Voltando à solução, observemos que todo inteiro n se escreve, de modo único, na forma $n = 2^r b$, onde r é um inteiro não negativo e b é um número ímpar. Por exemplo, $18 = 2^1.9$, $36 = 2^2.9$ e $125 = 2^0.125$. Para os números de 1 a 200, os valores possíveis de b são os ímpares de 1 a 199, que são 100. Aqui estão nossas gavetas! Já que há 100 valores possíveis de b, qualquer coleção de 101 números de 1 a 200 possui dois números $x = 2^r b$ e $y = 2^s b$ com o mesmo b (isto é, temos dois objetos que serão colocados na mesma gaveta). Se $r < s$, então x divide y; senão, y divide x, o que conclui a demonstração.