Encontro do Hotel de Hilbert

7ª Edição – Florianópolis – Maio de 2022

Contagem Dupla ou Demonstração Combinatória

Rogério Ricardo Steffenon

UNISINOS – Universidade do Vale do Rio dos Sinos

E-mail: steffenonenator@gmail.com

Resumo

Neste minicurso serão revisitados os princípios básicos da contagem (princípio multiplicativo, permutações e combinações simples).

Também abordaremos as combinações completas através do diagrama de quadras e ruas.

O foco principal do minicurso será a contagem dupla ou demonstração combinatória que usa argumentos de contagem para demonstrar que os dois lados de uma identidade fazem a contagem dos mesmos objetos, mas de maneiras diferentes.

Cartões Mágicos Binários

Faremos a mágica com os Cartões Mágicos Binários, usando o roteiro:

O *matemágico* escolhe alguém da plateia e pede que essa pessoa pense num número de 1 a 64, sem revelá-lo.

Em seguida, são apresentadas 6 cartelas e o *matemágico* faz 6 perguntas.

O número que você pensou está na primeira cartela? Está na segunda cartela? E assim por diante.

Feitas as 6 perguntas o *matemágico* revela o número que a pessoa pensou.

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Sistema Binário

Numa competição individual há 2^{n+1} participantes. Sabendo que a disputa é do tipo eliminatória*, quantos jogos serão realizados para se definir o vencedor?

*Os jogadores são divididos em duplas, ao acaso, e jogadores de cada dupla jogam entre si. Os perdedores são eliminados e os vencedores são divididos novamente em duplas, e assim por diante até restar apenas um jogador, que é proclamado campeão.

Prova: (Demonstração Combinatória ou Contagem Dupla).

Considere uma competição com 2^{n+1} competidores.

Em cada rodada o número de jogos é igual a metade do total de participantes restantes.

Na primeira rodada temos 2^n partidas, na segunda 2^{n-1}, e, assim, sucessivamente até que na última rodada temos *o jogo* que decide o campeão.

Com isso temos um total de $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$ partidas.

Por outro lado, podemos ver que cada jogo está associado a um jogador que é eliminado do torneio.

Como temos 2^{n+1} competidores e no final só resta um, que é o grande vencedor, segue que foram realizadas $2^{n+1} - 1$ partidas.

Portanto $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para todo $n \geqslant 1$. $\square$

A mágica acima tem a ver com o resultado abaixo que é a essência do sistema de numeração binário.

Teorema da Representação Binária

Todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como uma soma de diferentes potências de 2:

$2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64, 2^7 = 128, \ldots$

No sistema decimal temos, por exemplo,

$2305 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 5 \times 10^0 = 2305_{10}$

Vejamos a representação binária de alguns números naturais e usaremos um 2 subscrito para indicar a base 2:

$1 = 1 \times 2^0 = 1_2$

$2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 10_2$

$3 = 2 + 1 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11_2$

$4 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 100_2$

$13 = 8 + 4 + 1 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1101_2$

$37 = 32+4+1 = 1\times 2^5+0\times 2^4+0\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0 = 100101_2$

$64 = 1\times 2^6+0\times 2^5+0\times 2^4+0\times 2^3+0\times 2^2+0\times 2^1+0\times 2^0 = 1000000_2$

Princípios Básicos de Contagem

Princípio Multiplicativo

Exemplo: Um conjunto com n elementos possui 2^n subconjuntos.

Solução: Vamos começar considerando o conjunto $A = \{a, b, c\}$.

Os subconjuntos de A são: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

Note que cada elemento do conjunto A pode aparecer ou não no subconjunto. Quando escolhemos um subconjunto de A existem 2 possibilidades para o elemento a (pertencer ou não pertencer a A), duas para b e duas para c. E isso dá $2 \times 2 \times 2 = 8$ subconjuntos.

Agora suponha que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Cada elemento de A pode pertencer ou não a um determinado subconjunto e, como A possui n elementos, temos que A possui $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ subconjuntos. $\square$

Definição: *Suponha que você tenha que tomar n decisões sucessivas $d_1, d_2, ..., d_n$ e que a decisão d_i pode ser tomada de x_i maneiras. Então o número de maneiras de se tomarem as decisões sucessivas $d_1, d_2, ..., d_n$ é igual à multiplicação $x_1 x_2 \cdots x_n$.*

Permutações Simples

Exemplo: De quantas maneiras diferentes 8 alunos podem se sentar numa sala com 8 cadeiras?

Solução: O primeiro aluno tem 8 opções, o segundo tem 7, o terceiro tem 6, o quarto tem 5, o quinto tem 4, o sexto tem 3, o sétimo tem 2 e para o oitavo resta 1 opção. Logo, há $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ maneiras de os 8 alunos sentarem nas 8 cadeiras. $\square$

Definição: *O número de modos de ordenar n objetos distintos em fila (permutações simples de n objetos) é $P_n = n(n-1)\cdots 1 = n!$ Além disso, definimos $P_0 = 0! = 1$.*

Definição: Um anagrama é uma palavra ou frase formada pela transposição das letras de outra palavra ou frase.

Exemplo: Quantos são os anagramas da palavra FOLHA? Desses, quantos começam com vogal?

Solução: Como as 5 letras são diferentes, um anagrama da palavra FOLHA corresponde à ordenação dessas cinco letras em fila, ou seja, temos $5! = 120$ anagramas.

Os anagramas que iniciam com vogal são da forma O_ _ _ _ ou A_ _ _ _. Em cada um dos casos devemos calcular a quantidade de filas com as letras restantes, ou seja, temos $4! = 24$ anagramas. Logo, 48 anagramas da palavra FOLHA começam com vogal. $\square$

Permutações com Repetição

Exemplo: Quantos são os anagramas da palavra CAVALO?

Solução: Essa palavra tem duas letras A, e as demais são todas diferentes. Vamos supor que as letras A sejam A_1 e A_2, e, assim, todas as letras sejam diferentes. Logo, teríamos $6! = 720$ anagramas. Mas, quaisquer duas palavras obtidas pela permutação de A_1 e A_2 são, na verdade, a mesma palavra. Portanto temos $720/2 = 360$ anagramas. A divisão por 2 vem do fato de que estamos desconsiderando aquelas palavras repetidas que foram geradas pela permutação dos dois As iguais, o que foi feito de $2! = 2$ formas. □

Exemplo: Quantos são os anagramas da palavra BACANA?

Solução: Nesse caso temos três letras A e as demais diferentes. Usando o mesmo raciocínio do exemplo anterior, segue que a resposta é $6!/3! = 720/6 = 120$. O $3!$ refere-se às permutações dos 3 As iguais que geraram as mesmas palavras. □

Exemplo: Quantos são os anagramas da palavra BANANA?

Solução: Agora temos três letras A, duas letras N e uma letra B. Logo, essa palavra tem $6!/(3!2!) = 720/12 = 60$ anagramas. As divisões por $3!$ e $2!$ referem-se às palavras repetidas geradas pelos As e Ns. □

Definição: *O número de modos como se pode colocar* n *objetos em fila, onde* n_1 *objetos são iguais a* a_1, n_2 *são iguais a* $a_2, \ldots, n_r$ *são iguais a* a_r *é* $P_n^{n_1,n_2,..,n_r} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$.

Exemplo: Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA?

Solução: Supondo que A e Á sejam letras iguais, então temos um total de $10!/(2!3!2!1!1!1!) = 151200$ anagramas. Esse resultado está de acordo com o enunciado das permutações com repetição. A letra M repete-se 2 vezes, por isso devemos dividir todas as permutações por 2!. Da mesma forma, as letras A e T repetem-se 3 e 2 vezes, respectivamente, então devemos dividir todas as permutações por 3! e 2!. Por fim, as outras letras aparecem apenas uma vez cada uma, então elas não interferem em todas as permutações pois não se repetem. Podemos dividir por 1! por formalidade, mas isso não é necessário. $\square$

Combinações Simples

Exemplo: Um clube com 10 pessoas irá escolher uma diretoria composta por três membros: um presidente, um tesoureiro e um secretário. De quantos modos diferentes isso pode ser feito?

Solução: Temos 10 opções de escolha do presidente, depois restam 9 opções para o tesoureiro e 8 maneiras de escolha do secretário e isso dá um total de $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ modos diferentes de escolher a diretoria. $\square$

Perceba que no exemplo acima cada grupo de três pessoas é considerado diversas vezes, pois cada combinação possível considera o cargo além do grupo. O exemplo abaixo difere nesse sentido.

Exemplo: Um clube com 10 pessoas irá escolher uma diretoria composta por um colegiado de três pessoas. De quantos modos diferentes pode ser constituído esse colegiado?

Solução: Agora temos 10 opções para escolha de um dos membros, 9 para o segundo e mais 8 para o terceiro. Mas, por exemplo, o colegiado formado por Antônio, Bernardo e Carlos pode ser escolhido de $3! = 6$ maneiras diferentes. Devemos eliminar da nossa contagem essas combinações repetidas. Como cada combinação de três pessoas é escolhida $3!$ vezes, então basta dividir a quantidade total de combinações por esse valor. Assim, a quantidade de maneiras de escolher esse colegiado é igual a $(10 \cdot 9 \cdot 8)/3! = 10!/3!7! = 120$. $\square$

Perceba no exemplo acima como reescrevemos a fórmula final. A multiplicação $10 \cdot 9 \cdot 8$ do numerador foi escrita novamente na forma $10!/7!$. Tal reescrita é útil para formalizar o resultado de combinações simples.

Definição: *O número de* **combinações simples** *de n tomados k a k* **(número binomial)***, ou seja, o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto de n elementos é igual a*

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ para } 0 \leqslant k \leqslant n \; .$$

Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um conjunto com n elementos. É fácil ver que a cada subconjunto B de A, com k elementos, onde $0 \leqslant k \leqslant n$, corresponde a um subconjunto, o complementar de B em relação a A, com $n-k$ elementos. Isso quer dizer que o número de formas de escolher um subconjunto de A com k elementos é o mesmo número de formas de escolher o complementar desse conjunto, que deverá ter $n-k$ elementos. Portanto segue que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \text{para todo } \; 0 \leqslant k \leqslant n \; .$$

Exemplo: Observe que escolher três pessoas que formarão o colegiado entre 10, sem importar a ordem, é o mesmo que escolher sete pessoas que não formarão o colegiado entre essas 10. Assim temos a mesma solução

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{(10-7)!7!} = 120 = \binom{10}{3}.$$

Exemplo: **ENEM 2017** Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados. A carreta tem uma cor fixa, mas os carrinhos são pintados aleatoriamente nas cores azul, vermelho, verde e amarelo, sendo que existe pelo menos um carrinho de cada cor. A empresa que fabrica o brinquedo quer saber quantas combinações diferentes de cores podem ser feitas nas condições acima, considerando que a mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera uma combinação nova, isto é, apenas contamos combinações de colorações em quantidades diferentes.

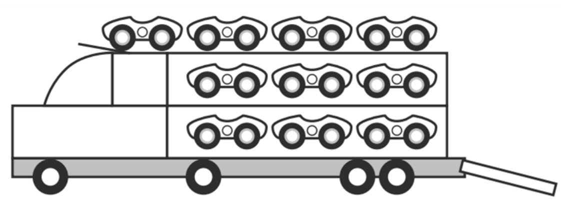

Figura 1: Caminhão-cegonha

Solução: Esse problema é equivalente a encontrar o número de soluções inteiras positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, onde cada $x_i > 0$ representa o número de carrinhos de uma determinada cor que estarão no brinquedo.

Essa equação é equivalente a $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) + (x_4 - 1) = 6$. Podemos fazer uma mudança de variável da forma $x_i - 1 = y_i$ e a equação acima se torna $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$, onde cada $y_i \in \mathbb{Z}, y_i \geqslant 0$.

Assim, encontrar o número de soluções da primeira equação é equivalente a encontrar o número de soluções da segunda equação, bastando ver que na segunda equação já desconsideramos os 4 carrinhos, um de cada cor, que obrigatoriamente deverão estar no brinquedo.

Para resolver esse problema utilizaremos um método que justificará a fórmula das combinações completas. Vamos representar as soluções como quadras de números inteiros não negativos (x_1, x_2, x_3, x_4), $x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geqslant 0$, como na figura abaixo. Representamos cada combinação num diagrama de quadras e ruas, contando todos os caminhos que vão do ponto O até o ponto A, sendo permitido apenas dois movimentos: subir ou deslocar para a direita. Na figura estão as representações das soluções $(1, 3, 2, 0)$ e $(2, 1, 1, 2)$.

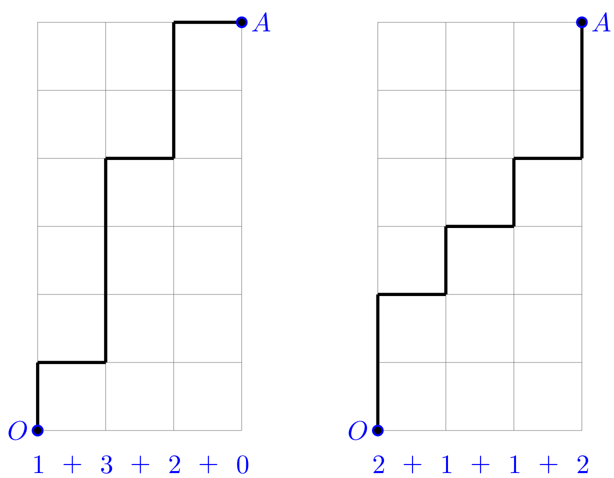

Figura 2: Combinações Completas

Em qualquer solução temos que subir 6 quadras e fazer 3 deslocamentos para a direita, o que corresponde ao número de anagramas de $SSSSSSDDD$. Portanto, o número de soluções é igual a $P_9^{6,3} = \dfrac{9!}{6!3!} = 84$. $\square$

Definição: *Sejam r e m números inteiros positivos. O número de soluções inteiras não negativas da equação $y_1 + y_2 + \cdots + y_r = m$ é igual a* $P_{m+r-1}^{m,r-1} = C_{r+m-1}^{m} = C_{r+m-1}^{r-1}$.

Com combinações completas precisamos fazer um percurso num diagrama de quadras e ruas de O até A, em que subimos r quadras e nos deslocamos $m-1$ vezes para a direita, que é equivalente a contar os anagramas da palavra $\underbrace{S\ldots S}_{m}\underbrace{D\ldots D}_{r-1}$ e isso é igual a $P_{m+r-1}^{m,r-1} = C_{r+m-1}^{m}$.

Exemplo: De quantas maneiras podemos escolher 3 bolas de sorvete numa lancheria que oferece 17 sabores diferentes?

Solução: Nesse caso precisamos encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{17} = 3$. Como vimos acima, a quantidade de escolhas possíveis é equivalente a contar
os anagramas de $\underbrace{S\ldots S}_{3}\underbrace{D\ldots D}_{16}$, que são $P_{19}^{3,16} = \dfrac{19!}{3!16!} = 969$. $\square$

Em alguns casos precisamos encontrar o número de soluções inteiras positivas de uma equação da forma $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$, onde $n \geqslant r \geqslant 1$. Nesse caso podemos reescrever a equação na forma $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \cdots + (x_r - 1) = n - r$. Agora trocando $x_i - 1$ por y_i e $n - r$ por m, o problema resume-se a encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação $y_1 + y_2 + \cdots + y_r = m$. Assim temos o seguinte resultado:

Proposição: *Sejam r e n números inteiros positivos, com $n \geqslant r$. O número de soluções inteiras positivas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ é igual a* $C_{r+n-r-1}^{n-r} = C_{n-1}^{n-r} = C_{n-1}^{r-1}$.

Contagem Dupla ou Demonstração Combinatória

Exemplo: Numa competição individual há 2^{n+1} participantes. Sabendo que a disputa é do tipo eliminatória*, quantos jogos serão realizados para se definir o vencedor?

*Os jogadores são divididos em duplas, ao acaso, e jogadores de cada dupla jogam entre si. Os perdedores são eliminados e os vencedores são divididos novamente em duplas, e assim por diante até restar apenas um jogador, que é proclamado campeão.

Prova: (Demonstração Combinatória ou Contagem Dupla).

Considere uma competição com 2^{n+1} competidores.

Em cada rodada o número de jogos é igual a metade do total de participantes restantes.

Na primeira rodada temos 2^n partidas, na segunda 2^{n-1}, e, assim, sucessivamente até que na última rodada temos *o jogo* que decide o campeão.

Com isso temos um total de $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$ partidas.

Por outro lado, podemos ver que cada jogo está associado a um jogador que é eliminado do torneio.

Como temos 2^{n+1} competidores e no final só resta um, que é o grande vencedor, segue que foram realizadas $2^{n+1} - 1$ partidas.

Portanto $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para todo $n \geqslant 1$.

Definição: *Uma demonstração combinatória de uma identidade é aquela que usa argumentos de contagem para demonstrar que os dois lados de uma identidade fazem a contagem dos mesmos objetos, mas de maneiras diferentes.*

Identidade de Pascal ou Relação de Stifel

Se k e n são inteiros positivos tais que $k \leqslant n$, então

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Demonstração. Podemos provar este resultado aplicando a definição de número binomial, mas optaremos pela demonstração combinatória. Suponha que de um grupo de $n+1$ pessoas tenha que ser formada uma comissão com k pessoas. Por definição de número binomial segue que o lado esquerdo da igualdade é uma solução possível para o problema. Por outro lado, fixemos uma pessoa, digamos P.

Vamos considerar as comissões que não contêm P e as comissões que contêm P. O número de elementos do primeiro conjunto é igual a $\binom{n}{k}$. Já, o número de comissões que contêm P é igual a $\binom{n}{k-1}$, pois como P já faz parte, resta escolher $k-1$ entre os n restantes.

Assim segue o resultado. $\square$

O Binômio de Newton

Se a e b são números reais e n é um número inteiro positivo, então:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \ .$$

Demonstração. Novamente teríamos a opção de provar o resultado usando indução em n e optaremos pela contagem dupla.

Temos que $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$. Assim segue que os termos desse produto são da forma $a^{n-i}b^i$ para $0 \leqslant i \leqslant n$.

Para contar a quantidade de vezes que o termo $a^{n-i}b^i$ aparece na soma, temos que escolher $n-i$ vezes o a a partir de n parcelas, e os outros i termos no produto ficam iguais a b.

Portanto o coeficiente de $a^{n-i}b^i$ é $\binom{n}{n-i}$, que é igual a $\binom{n}{i}$. $\square$

Vamos provar resultados envolvendo somatórios usando contagem dupla:

Exemplo: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Demonstração: Considere um conjunto com n elementos. Primeiro determine a quantidade de subconjuntos desse conjunto. Depois calcule a quantidade de subconjuntos com nenhum elemento, com um elemento, com dois elementos, até n elementos. Compare os resultados obtidos. $\square$

Exemplo: $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = 1\cdot\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n} = n\cdot 2^{n-1}$.

Demonstração: Considere o conjunto de todas as possíveis comissões tendo uma pessoa designada para presidente, que se pode formar a partir de um conjunto de n pessoas (uma comissão pode ter um número qualquer de pessoas, de 1 a n). Conte esse conjunto de comissões de duas maneiras diferentes e compare os resultados. Um método é, depois de escolhida a comissão, escolher o presidente entre seus membros. Outro é escolher primeiro uma pessoa para ser o presidente e depois escolher o restante da comissão. $\square$

Ex.: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = 1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + n^2\binom{n}{n} = n(n+1)2^{n-2}.$

Demonstração: Considere o conjunto de todas as possíveis comissões, tendo uma pessoa designada para presidente e uma para secretário, podendo a mesma pessoa acumular os dois cargos, que se pode formar a partir de um conjunto de n pessoas (uma comissão pode ter um número qualquer de pessoas, de 1 a n). Conte esse conjunto de comissões de duas maneiras diferentes e compare os resultados. Um método é, depois de escolhida a comissão, escolher o presidente e o secretário entre seus membros. Outro é escolher primeiro uma pessoa para ser o presidente, uma pessoa para secretário e depois escolher o restante da comissão. $\square$

Ex.: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = 2(2-1)\binom{n}{2} + \cdots + n(n-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$.

Demonstração: Considere o conjunto de todas as possíveis comissões tendo uma pessoa designada para presidente e outra para vice-presidente, que se pode formar a partir de n pessoas (portanto as comissões vão conter ao menos 2 pessoas). Conte essas comissões de 2 maneiras diferentes e compare os resultados. Um método é, depois de escolhida a comissão, escolher o presidente e o vice-presidente entre seus membros. Outro é escolher primeiro uma pessoa para ser o presidente e outra para vice-presidente e escolher depois o restante da comissão. $\square$

Exemplo: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = 1\cdot\binom{n}{1}^2 + 2\binom{n}{2}^2 + \cdots + n\binom{n}{n}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$.

Demonstração: Dados um conjunto de n homens e n mulheres, conte de duas maneiras diferentes todas as comissões de n pessoas com um homem escolhido para ser o presidente da comissão. $\square$

Identidade de Lagrange

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Basta mostrar o resultado abaixo e usar a Relação de Stifel

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \binom{2n}{n}.$$

Demonstração:

Considere o problema de formar comissões de n pessoas a partir de um grupo de n homens e n mulheres. Conte essas comissões de duas maneiras diferentes: primeiro diretamente e depois dividindo em casos, conforme o número de mulheres que a comissão contém. $\square$

Identidade de Euler ou Convolução de Vandermonde

Se m, n e p são inteiros não negativos tais que $m \geqslant p$ e $n \geqslant p$ então:

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m}{0}\binom{n}{p} + \binom{m}{1}\binom{n}{p-1} + \cdots + \binom{m}{p}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{p}.$$

Demonstração:

Considere um grupo com m homens e n mulheres. Calcule, de duas maneiras diferentes, a quantidade de comissões de tamanho p possíveis de serem formadas. $\square$

OBM 1992

Em um torneio de xadrez cada jogador disputou uma partida com cada um dos demais participantes. A cada partida, havendo o empate, cada jogador ganhou 1/2 ponto; caso contrário, o vencedor ganhou 1 ponto e o perdedor 0 pontos. Participaram homens e mulheres e **cada participante conquistou o mesmo número de pontos contra homens que contra mulheres**.

Mostre que o número total de participantes é um quadrado perfeito.

Demonstração: Sejam h o número de homens e m o número de mulheres no torneio. Como em cada jogo é disputado 1 ponto, nos jogos entre homens foram disputados $\binom{h}{2}$ pontos, e nos jogos entre mulheres foram disputados $\binom{m}{2}$ pontos. Sejam a e b os pontos conquistados por homens e mulheres, respectivamente. Das condições do enunciado, $a = \binom{h}{2}$ e $b = \binom{m}{2}$. Como o total de jogos do torneio é $\binom{h+m}{2}$, temos que

$$2\left[\binom{h}{2} + \binom{m}{2}\right] = \binom{h+m}{2} \iff h + m = (h-m)^2,$$

ou seja, o total de participantes, $h + m$, é quadrado perfeito. $\square$

Identidade de Fermat

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1} = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \cdots + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}\,.$$

Demonstração:

Considere um grupo de n pessoas ordenadas por idade, sendo i mais novo do que j se $i < j$.

Calcule a quantidade de grupos de pessoas de tamanho k que podem ser escolhidas. Por outro lado, determine quantos subconjuntos de tamanho k possuem i como a pessoa mais velha. $\square$

Exemplo:

$$\sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{i} = \binom{n}{i}\binom{i}{i} + \binom{n}{i+1}\binom{i+1}{i} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{i} = \binom{n}{i}2^{n-i}, \ i \leqslant n.$$

Demonstração: De um grupo de n pessoas, deve-se escolher um comitê de tamanho j. Desse comitê, será escolhido um subcomitê de tamanho i, com $i \leqslant j$. Calcule, de duas maneiras, o número de escolhas possíveis para comitê e subcomitê, inicialmente supondo que o comitê seja escolhido antes do subcomitê e depois supondo que o subcomitê seja escolhido antes do comitê. $\square$

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n+1}{k}^2 = 1\cdot\binom{n+1}{1}^2 + 2\binom{n+1}{2}^2 + \cdots + (n+1)\binom{n+1}{n+1}^2 = (2n+1)\binom{2n}{n}$$

Demonstração: Comece dividindo ambos os membros por $n+1$ e obtenha

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k} = \binom{2n+1}{n+1}$$

Essa equação é equivalente a

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1}\binom{n+1}{n+1-k} = \binom{2n+1}{n}$$

Para obter uma demonstração combinatória para tal equação, escolha n pessoas de um grupo de $2n+1$ pessoas de duas maneiras diferentes. $\square$

Permutações Caóticas

Definimos por D_n o número de permutações de $I_n = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leqslant k \leqslant n\} = \{1, \ldots, n\}$ sem pontos fixos (um elemento k é um ponto fixo quando ele ocupa a posição k na permutação. Usando o princípio da inclusão-exclusão podemos mostrar que

$$D_n = n!\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) \,.$$

A partir das informações acima, temos que:

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{i} D_{n-k} \,.$$

Demonstração: Para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, o número de permutações que tem k pontos fixos pode ser calculado escolhendo k elementos de I_n e depois desarrumando os demais, e isso é igual a $\binom{n}{k} D_{n-k}$. Somando de 0 a n, obtemos a expressão da direita. Como já é conhecido que o número de permutações de n elementos é igual a $n!$, segue o resultado. $\square$

Olimpíada Chinese – 1994

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor} = \binom{2n+1}{n}.$$

Demonstração: Consideremos uma turma com $2n$ alunos, n meninos e n meninas, e sua professora T. Denotemos as meninas por $a_1, a_2, ..., a_n$ e os meninos por $b_1, b_2, ..., b_n$. Para $1 \leqslant i \leqslant n$, consideremos os pares de alunos (a_i, b_i). A turma tem n ingressos para um jogo de futebol entre Brasil e Argentina. O número de maneiras de encontrar n pessoas entre as $2n+1$ da classe para ir para o jogo é $\binom{2n+1}{n}$.

Por outro lado, nós também podemos calcular esse número da seguinte maneira: fixado um inteiro $k, 0 \leqslant k \leqslant n$, escolha k pares dentre os n pares formados acima e dê um ingresso a cada um desses. Nesse caso há $\binom{n}{k}2^k$ maneiras de encontrar k pares e escolher um estudante de cada par que receberá um ingresso. Com isso restam ainda $n-k$ ingressos e $n-k$ pares de estudantes que não foram contemplados com ingressos. Agora escolhemos $\lfloor (n-k)/2 \rfloor$ pares e damos 2 ingressos para cada um desses pares. Há $\binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor}$ maneiras de se fazer isso.

Até aqui foram atribuídos $S = k + 2\lfloor (n-k)/2 \rfloor$ ingressos. Se $n-k$ é ímpar, $S = n-1$ atribui o último ingresso para a professora; se $n-k$ é par, $S = n$ e não haverá mais ingresso para ser atribuído. É fácil ver que, tomando todos os valores de k de 0 até n, obtemos todos os possíveis modos de distribuir esses n ingressos. Portanto, há

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor}$$

maneiras de escolher n pessoas que receberão os ingressos para o jogo. $\square$

A seguir um resultado associado aos coeficientes binomiais que é demonstrado via contagem dupla.

Proposição: Considere uma tabela $\ell \times c$ com zeros e uns, sendo C_j a soma dos números na coluna j, para $j \in \{1, \ldots, c\}$. Suponha que exista t tal que, para cada par de linhas, existam exatamente t colunas que tenham um em ambas as linhas. Então

$$t\binom{\ell}{2} = \sum_{j=1}^{c} \binom{C_j}{2}.$$

Demonstração: Basta contar pares de uns na mesma coluna. Seja A o conjunto de tais pares. Lembre que $\#A$ denota a quantidade de elementos do conjunto A.

(i) **Por linhas:** Cada par de linhas tem exatamente t pares de uns na mesma coluna. Como há $\binom{\ell}{2}$ pares de linhas, segue que $\#A = \binom{\ell}{2} \cdot t$.

(ii) **Por colunas:** Na coluna j há C_j uns, logo $\binom{C_j}{2}$ pares de uns na mesma coluna. Somando sobre as colunas obtemos $\#A = \sum_{j=1}^{c} \binom{C_j}{2}$.

Igualando os resultados para $\#A$, segue a proposição. $\square$

A contagem dupla pode ser usada para provar a existência por contradição.

IMC Duzentos estudantes participaram de uma competição de matemática. A prova tinha seis problemas. Sabe-se que cada problema foi resolvido por pelo menos 120 participantes. Prove que existem dois estudantes tais que cada problema foi resolvido por pelo menos um deles.

Demonstração: Suponha que o resultado é falso, ou seja, que para cada par de estudantes existe um problema que nenhum deles resolveu. Vamos contar problemas não resolvidos por pares de estudantes.

Considere a tabela abaixo com seis linhas, uma para cada problema, e 200 colunas, uma para cada estudante. Colocamos 1 na linha i e coluna j se, e só se, o aluno j não resolveu o problema i.

Tabela 1:

	1	2	3	...	200
Problema 1	1	0	0	...	0
Problema 2	1	0	0	...	0
Problema 3	0	1	1	...	0
Problema 4	1	1	1	...	1
Problema 5	1	0	1	...	0
Problema 6	0	0	0	...	1

Os problemas não resolvidos por pares de estudantes são pares de 1s na mesma linha. Seja A o conjunto dos pares de 1s na mesma linha.

Façamos dois cálculos:

(i) **Por linhas:** Como pelo menos 120 estudantes fizeram cada problema, no máximo $200-120=80$ não resolveram nenhum problema, e, assim, cada linha tem, no máximo, $\binom{80}{2}$ pares. Logo,

$$\#A \leqslant 6 \cdot \binom{80}{2} = 6 \cdot 40 \cdot 79 < 240 \cdot 80 = 19200.$$

(ii) **Por colunas:** Como cada par de estudantes não resolveu pelo menos um problema, temos que

$$\#A \geqslant \binom{200}{2} = 199 \cdot 100 = 19900.$$

Os dois cálculos acima conduzem a uma contradição, logo, existem dois estudantes que, juntos, resolveram todos os problemas. $\square$

Referências

[1] MORGADO, A. C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 10.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[2] ROSEN, K. H. **Matemática discreta e suas aplicações**. 6.ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

https://www.youtube.com/watch?v=fh150z7YK2Y

[3] Shine, C. **Contagem Dupla**.

https://www.urantiagaia.org/educacional/matematica/combinatoria3/Aula03-Contagem_Dupla.pdf

[4] Steffenon, R. R.; Guarnieri, F. M. **Belos Problemas de Matemática Discreta**. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.