Encontro do Hotel de Hilbert
7ª Edição – Florianópolis – Maio de 2022
Cartões Mágicos e Jogos de Subtração de Palitos

Rogério Ricardo Steffenon

UNISINOS – Universidade do Vale do Rio dos Sinos

E-mail: steffenonenator@gmail.com

Resumo

Neste minicurso estudaremos cartões mágicos (binários e de Fibonacci) e vários jogos de subtração de palitos.

Cartões Mágicos Binários

Faremos a mágica com os Cartões Mágicos Binários, usando o roteiro:

O *matemágico* escolhe alguém da plateia e pede que essa pessoa pense num número de 1 a 64, sem revelá-lo.

Em seguida, são apresentadas 6 cartelas e o *matemágico* faz 6 perguntas.

O número que você pensou está na primeira cartela? Está na segunda cartela? E assim por diante.

Feitas as 6 perguntas o *matemágico* revela o número que a pessoa pensou.

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Sistema Binário

Numa competição individual há 2^{n+1} participantes. Sabendo que a disputa é do tipo eliminatória*, quantos jogos serão realizados para se definir o vencedor?

*Os jogadores são divididos em duplas, ao acaso, e jogadores de cada dupla jogam entre si. Os perdedores são eliminados e os vencedores são divididos novamente em duplas, e assim por diante até restar apenas um jogador, que é proclamado campeão.

Prova: (Demonstração Combinatória ou Contagem Dupla).

Considere uma competição com 2^{n+1} competidores.

Em cada rodada o número de jogos é igual a metade do total de participantes restantes.

Na primeira rodada temos 2^n partidas, na segunda 2^{n-1}, e, assim, sucessivamente até que na última rodada temos *o jogo* que decide o campeão.

Com isso temos um total de $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$ partidas.

Por outro lado, podemos ver que cada jogo está associado a um jogador que é eliminado do torneio.

Como temos 2^{n+1} competidores e no final só resta um, que é o grande vencedor, segue que foram realizadas $2^{n+1} - 1$ partidas.

Portanto $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para todo $n \geqslant 1$.

A mágica acima tem a ver com o resultado abaixo que é a essência do sistema de numeração binário.

Teorema da Representação Binária

Todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como uma soma de diferentes potências de 2:

$2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64, 2^7 = 128, \ldots$

No sistema decimal temos, por exemplo,

$2305 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 5 \times 10^0 = 2305_{10}$

Vejamos a representação binária de alguns números naturais e usaremos um 2 subscrito para indicar a base 2:

$1 = 1 \times 2^0 = 1_2$

$2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 10_2$

$3 = 2 + 1 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11_2$

$4 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 100_2$

$13 = 8 + 4 + 1 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1101_2$

$37 = 32+4+1 = 1\times 2^5+0\times 2^4+0\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0 = 100101_2$

$64 = 1\times 2^6+0\times 2^5+0\times 2^4+0\times 2^3+0\times 2^2+0\times 2^1+0\times 2^0 = 1000000_2$

Cartões Mágicos de Fibonacci

Agora faremos a mágica com os Cartões Mágicos de Fibonacci, usando o seguinte roteiro:

O *matemágico* escolhe alguém da plateia e pede que essa pessoa pense num número de 1 a 120, sem revelá-lo.

Em seguida, são apresentadas as 10 cartelas e o *matemágico* faz **até** 10 perguntas.

O número que você pensou está na primeira cartela? Está na segunda cartela? E assim por diante.

Aqui há uma coisa que impressiona mais, pois se o número estiver numa determinada cartela, ele não estará na seguinte e, nesse caso, a quantidade de perguntas pode ser inferior a 10.

Ao final o *matemágico* revela o número que a pessoa pensou.

1	4	6	9	12	14
17	19	22	25	27	30
33	35	38	40	43	46
48	51	53	56	59	61
64	67	69	72	74	77
80	82	85	88	90	93
95	98	101	103	106	108
111	114	116	119	122	124

2	7	10	15	20	23
28	31	36	41	44	49
54	57	62	65	70	75
78	83	86	91	96	99
104	109	112	117	120	125

3	4	11	12	16	17
24	25	32	33	37	38
45	46	50	51	58	59
66	67	71	72	79	80
87	88	92	93	100	101
105	106	113	114	121	122

5	6	7	18	19	20
26	27	28	39	40	41
52	53	54	60	61	62
73	74	75	81	82	83
94	95	96	107	108	109
115	116	117	128	129	130

8	9	10	11	12	29
30	31	32	42	43	44
45	46	63	64	65	66
67	84	85	86	87	88
97	98	99	100	101	118
119	120	121	122	131	132

13	14	15	16	17	18
19	20	47	48	49	50
51	52	53	54	68	69
70	71	72	73	74	75
102	103	104	105	106	107
108	109	136	137	138	139

21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	32
33	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86
87	88	110	111	112	113
114	115	116	117	118	119
120	121	122	165	166	167

34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51
52	53	54	123	124	125

55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	199	200

89	90	91	92	93	94
95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106
107	108	109	110	111	112
113	114	115	116	117	118
119	120	121	122	123	124

Consideremos uma variação da sequência de Fibonacci

$F_1 = 1, F_2 = 2$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geqslant 3$.

Em outras palavras: 1 é o primeiro termo da sequência, 2 é o segundo e a partir do terceiro cada termo é soma dos dois anteriores.

$F_1 = 1, F_2 = 2$

$F_3 = F_2 + F_1 = 2 + 1 = 3$

$F_4 = F_3 + F_2 = 3 + 2 = 5$

$F_5 = F_4 + F_3 = 5 + 3 = 8$

$F_6 = F_5 + F_4 = 8 + 5 = 13$

$F_7 = F_6 + F_5 = 13 + 8 = 21$

$F_8 = F_7 + F_6 = 21 + 13 = 34$

$F_9 = F_8 + F_7 = 34 + 21 = 55$

$F_{10} = F_9 + F_8 = 55 + 34 = 89$

$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89 + 55 = 144$

Os resultados abaixo podem ser provados por indução:

$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n} - 1.$

$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$

Teorema de Zeckendorf

Todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como soma de termos não consecutivos da sequência

$F_n : 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$

Vejamos alguns exemplos:

$8 = F_5 = 10000_F$

$13 = F_6 = 100000_F$

$20 = 13 + 5 + 2 = F_6 + F_4 + F_2 = 101010_F$

$40 = 34 + 5 + 1 = F_8 + F_4 + F_1 = 10001001_F$

$43 = 34 + 8 + 1 = F_8 + F_5 + F_1 = 10010001_F$

$50 = 34 + 13 + 3 = F_8 + F_6 + F_3 = 10100100_F$

$65 = 55 + 8 + 2 = F_9 + F_5 + F_2 = 100010010_F$

$144 = F_{11} = 10000000000_F$

https://www.dcode.fr/zeckendorf-representation

Observe as representações de 40 e 65, o que é possível verificar?

Jogos de Subtração

Agora analisaremos jogos com informação completa em que dois jogadores jogam alternadamente e sabem tudo sobre a posição corrente do jogo e os possíveis lances a cada momento.

Em particular, *informação completa* significa que o elemento de sorte não pode estar presente no jogo, nem pode haver *cartas escondidas* ou algo do gênero.

Posição Ganhadora

É possível deixar o adversário em uma posição perdedora. A partir dela, *podemos escolher uma jogada* e repassar uma posição perdedora para o adversário.

Posição Perdedora

Não é possível deixar o adversário em uma posição perdedora. A partir dela, é impossível escolher uma jogada e repassar uma posição perdedora para o adversário. Em outras palavras, *não importa o movimento escolhido*, o adversário irá receber uma posição ganhadora.

Exemplo 1

Nesse jogo há dois jogadores, Aline e Bruno, e n palitos numa mesa.

Uma jogada consiste em retirar 1, 2 ou 3 palitos.

Aline começa e eles jogam alternadamente.

Ganha quem retirar o último palito.

- Se $n = 37$, qual dos dois tem estratégia vencedora?

  Caso afirmativo, qual é a estratégia?

- Se $n = 36$, qual dos dois tem estratégia vencedora?

  Caso afirmativo, qual é a estratégia?

Questão: Quais são as posições perdedoras nesse jogo?

Começamos com situações mais simples para depois resolver o problema e tentar generalizar.

Nesse jogo há dois jogadores, Aline e Bruno, e n palitos numa mesa.

Uma jogada consiste em retirar 1, 2 ou 3 palitos.

Aline começa e eles jogam alternadamente, ganha quem retirar o último palito.

Posição que leva a **alguma** posição perdedora: **G**

Posição que **só** leva a uma posição ganhadora: **P**

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	$\cdots$
													$\cdots$

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	$\cdots$
P	**G**	**G**	**G**										$\cdots$

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	$\cdots$
P	**G**	**G**	**G**	**P**									$\cdots$

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	$\cdots$
P	**G**	**G**	**G**	**P**	**G**	**G**	**G**						$\cdots$

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	$\cdots$
P	**G**	**G**	**G**	**P**	**G**	**G**	**G**	**P**	**G**	**G**	**G**	**P**	$\cdots$

Voltando ao problema original...

- Se $n = 37$, qual dos dois tem estratégia vencedora?

  Caso afirmativo, qual é a estratégia?

Aline tem estratégia vencedora e deve retirar **um** palito e assim deixa 36 para Bruno. Depois Aline sempre deve retirar de modo a deixa uma quantidade múltiplo de 4 para Bruno. Vejamos um exemplo:

$37 \xrightarrow{\text{A}-1} 36 \xrightarrow{\text{B}-3} 33 \xrightarrow{\text{A}-1} 32 \xrightarrow{\text{B}-1} 31 \xrightarrow{\text{A}-3} 28 \xrightarrow{\text{B}-2} 26 \xrightarrow{\text{A}-2} 24 \ldots$

- Se $n = 36$, qual dos dois tem estratégia vencedora?

  Caso afirmativo, qual é a estratégia?

Agora Bruno (segundo jogador) tem estratégia vencedora, pois Aline deixará 35, 34 ou 33 palitos após a primeira retirada.

Assim Bruno sempre conseguirá deixar um múltiplo de 4 para Aline...

Proposição

No jogo com dois jogadores e n palitos, em que uma jogada consiste em retirar 1, 2 ou 3 palitos e ganha quem retirar o último palito, as posições perdedoras são aquelas em que $n = 4k$ com $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Prova:

Se n deixa resto 1, 2 ou 3 na divisão por 4, então o primeiro jogador tem estratégia vencedora:

$4k + 1 \xrightarrow{-1} 4k$

$4k + 2 \xrightarrow{-2} 4k$

$4k + 3 \xrightarrow{-3} 4k.$

Se n for divisível por 4, então o segundo jogador tem estratégia vencedora:

$4k \overset{-r}{\to} 4k-r = 4k-4+4-r = 4(k-1)+4-r \overset{4-r}{\to} 4(k-1), r \in \{1, 2, 3\}.$

Exemplo 2

Agora temos dois jogadores, André e Bruna, e n palitos numa mesa.

Uma jogada consiste em retirar 1, 3 ou 4 palitos.

André começa e eles jogam alternadamente.

Ganha quem retirar o último palito.

- Se $n = 13$, qual dos dois tem estratégia vencedora?

  Caso afirmativo, qual é a estratégia?

- Se $n = 14$, qual dos dois tem estratégia vencedora?

  Caso afirmativo, qual é a estratégia?

- Se $n = 16$, qual dos dois tem estratégia vencedora?

  Caso afirmativo, qual é a estratégia?

Mais uma vez começamos com situações mais simples...

Posição que leva a **alguma** posição perdedora: **G**

Posição que **só** leva a uma posição ganhadora: **P**

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	$\cdots$
P	**G**		**G**	**G**									$\cdots$

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	$\cdots$
P	**G**	**P**	**G**	**G**	**G**	**G**							$\cdots$

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	$\cdots$
P	**G**	**P**	**G**	**G**	**G**	**G**	**P**	**G**	**P**	**G**	**G**	**G**	$\cdots$

Voltando ao problema original...

- Se $n = 13$, qual dos dois tem estratégia vencedora?

  Caso afirmativo, qual é a estratégia?

André tem estratégia vencedora, basta começar retirando 4 palitos.

- Se $n = 14$, qual dos dois tem estratégia vencedora?

  Caso afirmativo, qual é a estratégia?

Agora Bruna tem estratégia vencedora, pois André terá que retirar 1, 3 ou 4 palitos e assim restarão 13, 10 ou 9 palitos para Bruna.

- Se $n = 16$, qual dos dois tem estratégia vencedora?

  Caso afirmativo, qual é a estratégia?

Novamente Bruna tem estratégia vencedora, pois André terá que retirar 1, 3 ou 4 palitos e assim restarão 15, 13 ou 12 palitos para Bruna. Caso André retire 1 palito, Bruna deverá retirar 1 palito e deixar 14 para André.

Proposição

No jogo com dois jogadores e n palitos, em que uma jogada consiste em retirar 1, 3 ou 4 palitos e ganha quem retirar o último palito, as posições perdedoras são aquelas em que $n = 7k$ ou $n = 7k + 2$, com $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Prova:

Se n deixa resto 1, 3, 4, 5 ou 6 na divisão por 7, então o primeiro jogador tem estratégia vencedora:

$7k + r \xrightarrow{-r} 7k$, se $r \in \{1, 3, 4\}$

$7k + r \xrightarrow{-(r-2)} 7k + 2$, se $r \in \{5, 6\}$

Se n deixa resto 0 ou 2 na divisão por 7, então o segundo jogador tem estratégia vencedora:

$7k \xrightarrow{-1} 7k - 1 \xrightarrow{-4} 7k - 5 = 7(k-1) + 2$

$7k \xrightarrow{-3} 7k - 3 \xrightarrow{-4} 7k - 7 = 7(k-1)$

$7k \xrightarrow{-4} 7k - 4 \xrightarrow{-3} 7k - 7 = 7(k-1)$

$7k + 2 \xrightarrow{-1} 7k + 1 \xrightarrow{-1} 7k$

$7k + 2 \xrightarrow{-3} 7k - 1 \xrightarrow{-4} 7k - 5 = 7(k-1) + 2$

$7k + 2 \xrightarrow{-4} 7k - 2 \xrightarrow{-3} 7k - 5 = 7(k-1) + 2.$

Exemplo 3

Temos dois jogadores e $n \geqslant 2$ moedas numa mesa, eles jogam alternadamente de acordo com as seguintes regras:

(i) o primeiro a jogar retira no mínimo uma moeda, mas não todas.

(ii) quem jogar a seguir deve retirar no mínimo uma moeda e no máximo o número de moedas que o jogador anterior retirou.

(iii) ganha quem retirar a última moeda.

Questão: Quais são as posições perdedoras?

Novamente começamos com situações mais simples.

Aqui temos que fazer uma ressalva: o vencedor é indicado de acordo com a quantidade de moedas no início do jogo.

O primeiro jogador tem estratégia ganhadora: **G**

O segundo jogador tem estratégia ganhadora: **P**

2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	$\cdots$
P	**G**	**P**	**G**								$\cdots$

Observe que se a quantidade de moedas for ímpar o primeiro jogador tem estratégia vencedora: basta retirar **uma** moeda. Isso significa que um jogador evitará deixar uma quantidade ímpar de moedas para o seu adversário.

Assim segue que

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
P	G	P	G		G		G		G		G		G	$\cdots$

Se $n = 6$ *basta o primeiro jogador retirar duas moedas*

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
P	G	P	G	G	G		G		G		G		G	$\cdots$

Se $n = 8$, o segundo jogador tem estratégia vencedora.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
P	G	P	G	G	G	P	G		G		G		G	$\cdots$

Se $n = 10$ basta o primeiro jogador retirar duas moedas.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
P	G	P	G	G	G	P	G	G	G		G		G	$\cdots$

Se $n = 12$ basta o primeiro jogador retirar quatro moedas.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
P	G	P	G	G	G	P	G	G	G	G	G		G	$\cdots$

Se $n = 14$ basta o primeiro jogador retirar seis moedas.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
P	G	P	G	G	G	P	G	G	G	G	G	G	G	$\cdots$

Proposição

Temos dois jogadores e $n \geqslant 2$ moedas, eles jogam alternadamente de acordo com as seguintes regras:

(i) o primeiro a jogar retira no mínimo uma moeda, mas não todas.

(ii) quem jogar a seguir deve retirar no mínimo uma moeda e no máximo o número de moedas que o jogador anterior retirou.

(iii) ganha quem retirar a última moeda.

Neste jogo as posições perdedoras são aquelas em que $n = 2^k$, com $k \in \{1, 2, \ldots\}$.

Exemplo 4 – OBM 2014 – Nível 1 – Fase 3

Ana e Beatriz possuem muitas moedas. Elas colocam várias sobre uma mesa e jogam de acordo com as seguintes regras:

i. o primeiro a jogar retira no mínimo uma moeda, mas não todas.

ii. quem jogar a seguir pode retirar no mínimo uma moeda e no máximo o dobro do número de moedas que o jogador anterior retirou.

iii. ganha quem retirar a última moeda.

(a) Suponha que elas coloquem 11 moedas sobre a mesa.

Se Ana for a primeira a jogar e retirar duas moedas, mostre como Beatriz pode vencer o jogo (não importando quais sejam as demais jogadas de Ana).

(b) Agora suponha que elas coloquem 15 moedas sobre a mesa.

Mostre como a primeira a jogar pode vencer o jogo sempre (não importando quais sejam as jogadas da segunda).

(a) A estratégia de Beatriz é retirar uma moeda e deixar 8 moedas para Ana e assim sobram duas possibilidades para Ana tentar a vitória:

- $11 \xrightarrow{\mathbf{A}} 9 \xrightarrow{\mathbf{B}} 8 \xrightarrow{\mathbf{A}} 7 \xrightarrow{\mathbf{B}} 5 \xrightarrow{\mathbf{A}} 4 \xrightarrow{\mathbf{B}} 3$
- $11 \xrightarrow{\mathbf{A}} 9 \xrightarrow{\mathbf{B}} 8 \xrightarrow{\mathbf{A}} 6 \xrightarrow{\mathbf{B}} 5 \xrightarrow{\mathbf{A}} 4 \xrightarrow{\mathbf{B}} 3$

Observação: Ana tinha uma estratégia vencedora, bastava ter retirado 3 moedas na primeira jogada.

Veja as possíveis jogadas seguintes, onde Beatriz tentaria (sem sucesso!) a vitória.

- $11 \xrightarrow{\mathbf{A}} 8 \xrightarrow{\mathbf{B}} 7 \xrightarrow{\mathbf{A}} 5 \xrightarrow{\mathbf{B}} 4 \xrightarrow{\mathbf{A}} 3$
- $11 \xrightarrow{\mathbf{A}} 8 \xrightarrow{\mathbf{B}} 6 \xrightarrow{\mathbf{A}} 5 \xrightarrow{\mathbf{B}} 4 \xrightarrow{\mathbf{A}} 3$

(b) Digamos que Ana seja a primeira a jogar.

A estratégia de Ana é retirar 2 moedas e deixar 13 moedas para Beatriz

Veja as tentativas (sem sucesso) de Beatriz para tentar a vitória:

1. Beatriz tira uma moeda e deixa 12. Neste caso Ana tira uma e deixa 11:

- $15 \xrightarrow{\mathbf{A}} 13 \xrightarrow{\mathbf{B}} 12 \xrightarrow{\mathbf{A}} 11$

Veja como continua:

- $15 \xrightarrow{\mathbf{A}} 13 \xrightarrow{\mathbf{B}} 12 \xrightarrow{\mathbf{A}} 11 \xrightarrow{\mathbf{B}} 10 \xrightarrow{\mathbf{A}} 8$
- $15 \xrightarrow{\mathbf{A}} 13 \xrightarrow{\mathbf{B}} 12 \xrightarrow{\mathbf{A}} 11 \xrightarrow{\mathbf{B}} 9 \xrightarrow{\mathbf{A}} 8$

Agora estamos numa situação parecida com o item a) e é possível mostrar que Ana tem estratégia vencedora!

2. Beatriz tira 2 moedas e deixa 11. Neste caso Ana tira 3 e deixa 8:

- $15 \xrightarrow{\mathbf{A}} 13 \xrightarrow{\mathbf{B}} 11 \xrightarrow{\mathbf{A}} 8$

3. Beatriz tira 3 moedas e deixa 10. Neste caso Ana tira 2 e deixa 8:

- $15 \xrightarrow{\mathbf{A}} 13 \xrightarrow{\mathbf{B}} 10 \xrightarrow{\mathbf{A}} 8$

4. Beatriz tira 4 moedas e deixa 9. Neste caso Ana tira 1 e deixa 8:

- $15 \xrightarrow{\mathbf{A}} 13 \xrightarrow{\mathbf{B}} 9 \xrightarrow{\mathbf{A}} 8$

Nos casos 2, 3 e 4 estamos numa situação parecida com o item (a) e é possível mostrar que Ana tem estratégia vencedora!

Exemplo 4 – Geral – Adaptado OBM 2014 – N3 – Fase 3

Temos dois jogadores e $n \geqslant 2$ moedas numa mesa, eles jogam alternadamente de acordo com as seguintes regras:

(i) o primeiro a jogar retira no mínimo uma moeda, mas não todas.

(ii) quem jogar a seguir pode retirar no mínimo uma moeda e no máximo o dobro do número de moedas que o jogador anterior retirou.

(iii) ganha quem retirar a última moeda.

Questão: Quais são as posições perdedoras?

Novamente devemos fazer uma ressalva: o vencedor é indicado de acordo com a quantidade de moedas no início do jogo.

O primeiro jogador tem estratégia ganhadora: **G**

O segundo jogador tem estratégia ganhadora: **P**

Observe que $n = 2$ e $n = 3$ são posições perdedoras.

Já $n = 4$ é uma posição ganhadora, basta retirar uma moeda.

2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	$\cdots$
P	**P**	**G**												$\cdots$

Se $n = 5$, então o segundo jogador tem estratégia vencedora.

2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	$\cdots$
P	**P**	**G**	**P**	**G**							$\cdots$

Se $n = 6$ basta o primeiro jogador retirar uma moeda.

2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	$\cdots$
P	**P**	**G**	**P**	**G**							$\cdots$

Se $n = 7$ basta o primeiro jogador retirar duas moedas.

2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	$\cdots$
P	**P**	**G**	**P**	**G**	**G**						$\cdots$

Agora se $n = 8$, o segundo jogador tem estratégia vencedora.

2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	$\cdots$
P	**P**	**G**	**P**	**G**	**G**	**P**					$\cdots$

Proposição

Temos dois jogadores e $n \geqslant 2$ moedas, eles jogam alternadamente de acordo com as seguintes regras:

(i) o primeiro a jogar retira no mínimo uma moeda, mas não todas.

(ii) quem jogar a seguir deve retirar no mínimo uma moeda e no máximo o dobro do número de moedas que o jogador anterior retirou.

(iii) ganha quem retirar a última moeda.

Neste jogo as posições perdedoras são aquelas em que n é um número da sequência de Fibonacci: $2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

Exemplo 5 – O Jogo do NIM

Este é um jogo de origem chinesa e foi o primeiro jogo estudado matematicamente e deu origem ao Teorema de Bouton (1901).

Temos p pilhas de palitos e dois jogadores. Os dois jogam alternadamente e, em cada jogada, aquele que estiver na sua vez pode retirar quantos palitos quiser (pelo menos um) de apenas uma pilha.

Ganha quem retirar o último palito.

Questão: Quais são as posições perdedoras?

- Se $p = 1$, então o primeiro jogador tem estratégia vencedora, basta retirar todos os palitos.

- Se $p = 2$, temos duas situações:

(i) As duas pilhas têm a mesma quantidade de palitos. Esta é uma posição perdedora, ou seja, o segundo jogador tem estratégia vencedora.

Digamos que cada pilha tenha 21 palitos e que o primeiro jogador (A) retira 5 palitos da pilha da esquerda, então o segundo jogador (B) retira 5 palitos da pilha da direita. Assim o segundo jogador sempre devolve as duas pilhas com a mesma quantidade de palitos, até que em determinado momento ele devolve as duas pilhas vazias e portanto ele vence.

$(21, 21) \xrightarrow{A} (16, 21) \xrightarrow{B} (16, 16)$

(ii) As duas pilhas têm quantidades diferentes. Neste caso o primeiro jogador tem estratégia vencedora, basta deixar as duas pilhas com a mesma quantidade de palitos.

Digamos que uma pilha tenha 29 e a outra 40 palitos:

$(29, 40) \xrightarrow{\text{A}} (29, 29)$

(o primeiro jogador retirou 11 palitos da pilha da direita.)

Para três ou mais pilhas, a análise já é mais complicada. Veremos um exemplo com três pilhas com 4, 7 e 13 palitos.

Veremos $(4, 7, 13)$ é uma posição ganhadora, ou seja, quem estiver na sua vez de jogar pode colocar o adversário numa posição perdedora.

Isso será consequência do Teorema de Bouton cujo enunciado para 3 pilhas será dado abaixo.

Para entender esse teorema precisamos definir a *soma nim*.

Soma Nim

Lembremos a representação binária

$54 = 32+16+4+2 = 1\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0 = 110110_2$

$40 = 32+8 = 1\times2^5+0\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+0\times2^0 = 101000_2$

$37 = 32+4+1 = 1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0 = 100101_2$

$13 = 8+4+1 = 1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0 = 1101_2$

$7 = 4+2+1 = 1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0 = 111_2$

$4 = 1\times2^2+0\times2^1+0\times2^0 = 100_2$

Soma módulo 2:

$0+0=0$: a soma de dois números pares dá um número par.

$0+1=1+0=1$: a soma de um par com um ímpar dá um ímpar.

$1+1=0$: a soma de dois números ímpares dá um número par.

Agora a soma nim dos números $40 = 101000_2$ e $54 = 110110_2$:

$1\,0\,1\,0\,0\,0_2 \oplus 1\,1\,0\,1\,1\,0_2 = (1+1)(0+1)(1+0)(0+1)(0+1)(0+0) = 011110_2$

$(a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6)_2 \oplus (b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5\,b_6)_2 = (c_1\,c_2\,c_3\,c_4\,c_5\,c_6)_2$

$c_i = a_i + b_i \pmod 2$ para $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$.

Sejam n um inteiro positivo e duas n-uplas de números inteiros $(a_1,\ldots,a_n)$ e $(b_1,\ldots,b_n)$. Definimos a soma nim como sendo $(a_1\,a_2\,a_3\,\cdots\,a_n)_2 \oplus (b_1\,b_2\,b_3\,\cdots\,b_n)_2 = (c_1\,c_2\,c_3\,\cdots\,c_n)_2$, onde somamos coordenada a coordenada módulo 2: $c_i = a_i + b_i (\mathrm{mod}\ 2)$.

Teorema de Bouton – 1901 – três pilhas

Um jogo que tem 3 pilhas de tamanhos a, b e c é posição perdedora se, e somente se, $a \oplus b \oplus c = 0$.

Considere 3 pilhas com 13, 37 e 40 palitos.

Logo a posição pode ser descrita pela terna $(a, b, c) = (13, 37, 40)$.

Assim segue que

$13 \oplus 37 \oplus 40 = 0\,0\,1\,1\,0\,1_2 \oplus 1\,0\,0\,1\,0\,1_2 \oplus 1\,0\,1\,0\,0\,0_2 =$

$(0{+}1{+}1)(0{+}0{+}0)(1{+}0{+}1)(1{+}1{+}0)(0{+}0{+}0)(1{+}1{+}0) = 000000_2 = 0.$

Pelo Teorema de Bouton segue que a posição $(13, 37, 40)$ é perdedora.

Agora consideremos a posição $(4, 7, 13)$.

Observe que $4 \oplus 7 \oplus 13 = 0\,1\,0\,0_2 \oplus 0\,1\,1\,1_2 \oplus 1\,1\,0\,1_2 =$

$(0 + 0 + 1)(1 + 1 + 1)(0 + 1 + 0)(0 + 1 + 1) = 1110_2 = 14 \neq 0.$

Logo $(4, 7, 13)$ é uma posição ganhadora.

Neste caso podemos fazer a seguinte jogada $(4, 7, 13) \longrightarrow (4, 7, 3)$.

Note que, pelo Teorema de Bouton, $(4, 7, 3)$ é uma posição perdedora:

$4 \oplus 7 \oplus 3 = 100_2 \oplus 111_2 \oplus 011_2 = (1{+}1{+}0)(0{+}1{+}1)(0{+}1{+}1) = 000_2 = 0.$

Teorema de Bouton – 1901

Um jogo que tem p pilhas de tamanhos $n_1, n_2, \ldots, n_p$ é posição perdedora se, e somente se, $n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_p = 0$.

Exemplo 6 – O Jogo de Wythoff

Dois jogadores jogam alternadamente retirando palitos de duas pilhas sobre uma mesa. Na sua vez, cada jogador pode retirar qualquer quantidade de palitos de uma pilha ou a mesma quantidade de palitos de ambas as pilhas. O ganhador é aquele que retirar o último palito.

Questão: Quais são as posições perdedoras?

Teorema: As posição perdedoras (x_n, y_n) do Jogo de Wythoff com $x_n < y_n$ são dadas por $(x_n, y_n) = (\lfloor \alpha n \rfloor, \lfloor (\alpha+1)n \rfloor)$, onde
$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

As posições perdedoras satisfazem as seguintes condições:

(a) Cada número natural aparece exatamente uma vez.

(b) $y_n - x_n = n$.

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
x_n	**1**	**3**	**4**	**6**	**8**	**9**	**11**	**12**	**14**	**16**	**17**	**19**	**21**	**22**	**24**	**25**
y_n	**2**	**5**	**7**	**10**	**13**	**15**	**18**	**20**	**23**	**26**	**28**	**31**	**34**	**36**	**39**	**41**

Conjectura: As posição perdedoras no Jogo de Wythoff são da forma (m, n), onde m termina em 1 ou numa quantidade par de zeros na representação de Zeckendorf e n tem representação idêntica à m com o acréscimo de um zero ao final.

São posições perdedoras (m, n):

(1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10), (8, 13), (9, 15), (12, 20), ..., (40, 65), ...

Vejamos a representação de Zeckendorf dos pares acima:

$(1,\, 2) = (1_F,\, 10_F)$, $(3,\, 5) = (100_F,\, 1000_F)$, $(4,\, 7) = (101_F,\, 1010_F)$,

$(6,\, 10) = (1001_F,\, 10010_F)$, $(8,\, 13) = (10000_F,\, 100000_F)$,

$(9,\, 15) = (10001_F,\, 100010_F)$, $(12,\, 20) = (10101_F,\, 101010_F)$,

$(40,\, 65) = (10001001_F,\, 100010010_F)$

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
x_n	**1**	**3**	**4**	**6**	**8**	**9**	**11**	**12**	**14**	**16**	**17**	**19**	**21**	**22**	**24**	**25**
y_n	**2**	**5**	**7**	**10**	**13**	**15**	**18**	**20**	**23**	**26**	**28**	**31**	**34**	**36**	**39**	**41**

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$(x_n)_F$	**1**	**100**	**101**	**1001**	**10000**	**10001**	**10100**
$(y_n)_F$	**10**	**1000**	**1010**	**10010**	**100000**	**100010**	**101000**

n	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
$(x_n)_F$	**10101**	**100001**	**100100**	**100101**	**101001**
$(y_n)_F$	**101010**	**1000010**	**1001000**	**1001010**	**1010010**

n	**13**	**14**	**15**	**16**
$(x_n)_F$	**10000000**	**10000001**	**10000100**	**10000101**
$(y_n)_F$	**100000000**	**100000010**	**100001000**	**100001010**

Referências

[1] Feitosa, S. **A Função Parte Inteira - I**.

https://poti.impa.br/uploads/material_teorico/a2ldv0miyp4ow.pdf

[2] Ferguson, T. S. **Game Theory**.

http://www.inf.ufsc.br/ joao.dovicchi/pos-ed/pos/games/comb.pdf

[3] Holanda, B. **Jogos – Pólos Olímpicos de Treinamento**.

http://poti.impa.br/upload/Aula%2006%20-%20Jogos45.pdf

[4] Lopes, D. **Jogos: Cê manja ou Nim? Semana Olímpica 2017**.

https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/02/Davi-Lopes-Jogos-C%C3%AA-Manja-ou-Nim.pdf

[5] Severo, F. **O Jogo de Wythoff – I**.

https://www.youtube.com/watch?v=fh150z7YK2Y

[6] Severo, F. **O Jogo de Wythoff – II**.

https://www.youtube.com/watch?v=my_1rRffmPk

[7] Steffenon, R. R.; Guarnieri, F. M. **Belos Problemas de Matemática Discreta**. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.