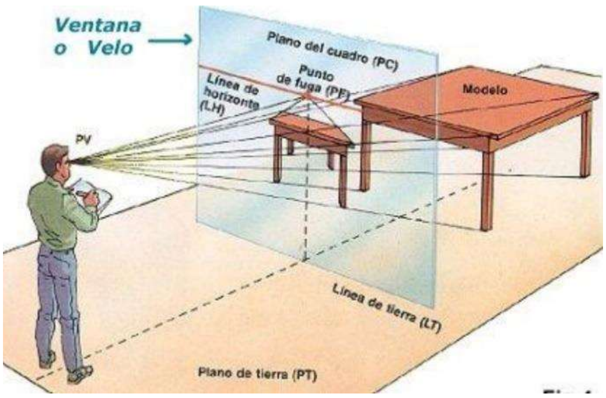
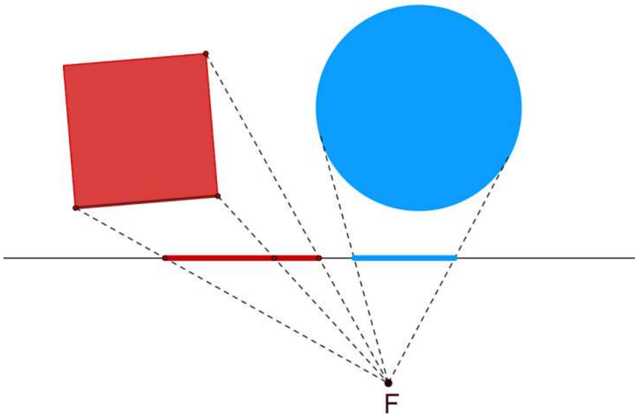
Geometria Espacial – visualização

O ensino de Geometria Espacial contém um ingrediente específico e de difícil abordagem: o da visualização de objetos 3D em um plano (papel ou tela do computador). Nós vivemos no mundo tridimensional, mas tudo o que estudamos, tudo o que lemos e escrevemos está no espaço bidimensional.
É, portanto, relevante para o ensino de geometria espacial, observar certas questões nessa tentativa de fazer a representação em 2D de um objeto 3D.

A figura abaixo mostra como vemos um objeto. Na projeção com origem no olho do observador de uma mesa sobre um plano que intersecta as linhas de visada (similar a uma foto), perde-se uma dimensão e, consequentemente, muitas informações sobre o objeto que vemos.

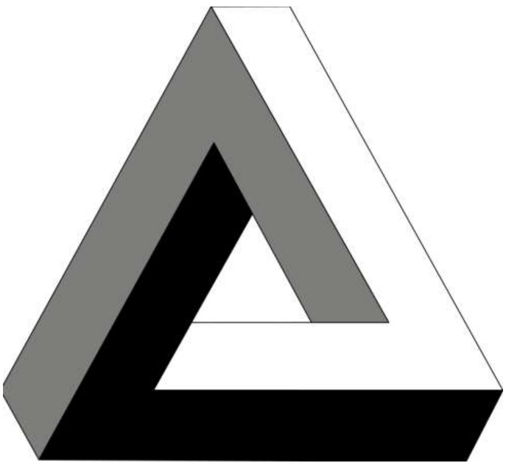


Imagine que uma formiga minúscula viva sobre um plano e, de repente, ela vê um quadrado vermelho e uma circunferência azul.
Sua visão é assim:



Ilusões de visualização

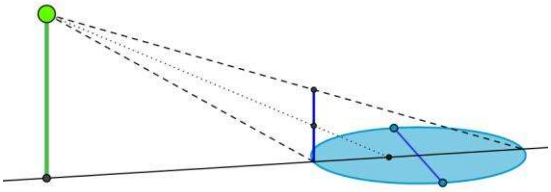
Triangulo de Penrose



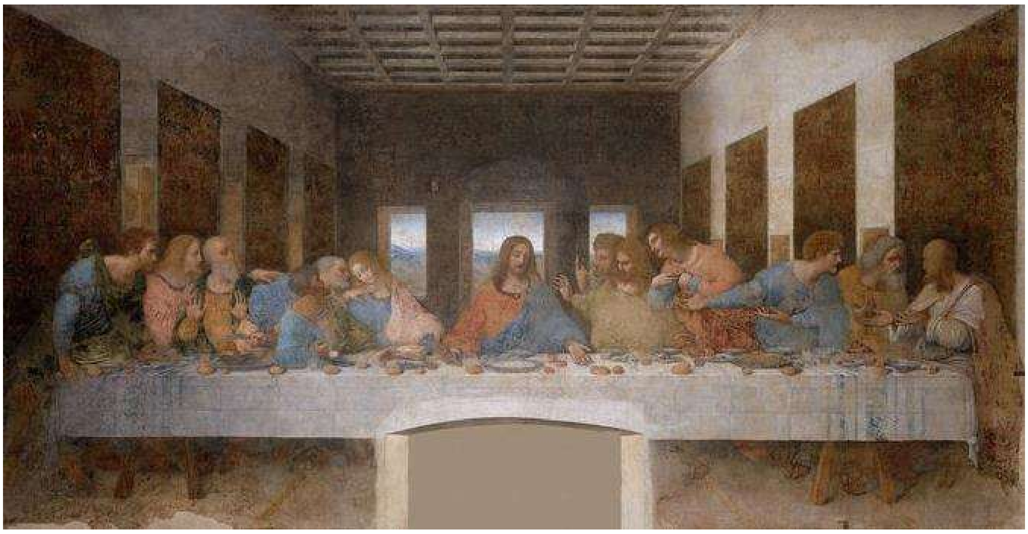
Uma esfera na calçada

A realidade

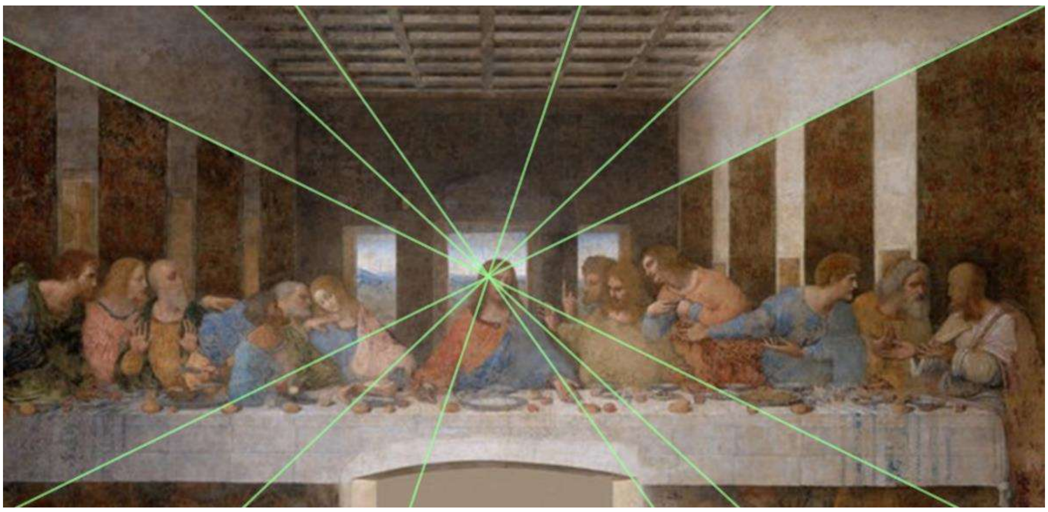
A geometria da ilusão



A última ceia

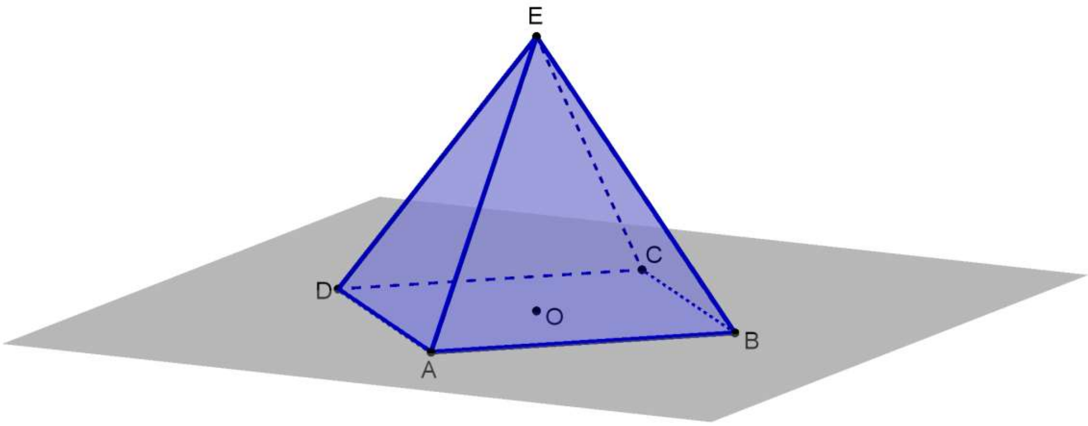


As retas paralelas e o ponto de fuga



Problema 1

Em uma pirâmide quadrangular regular as arestas da base medem 4 e as arestas laterais medem 6. Qual é o volume dessa pirâmide?

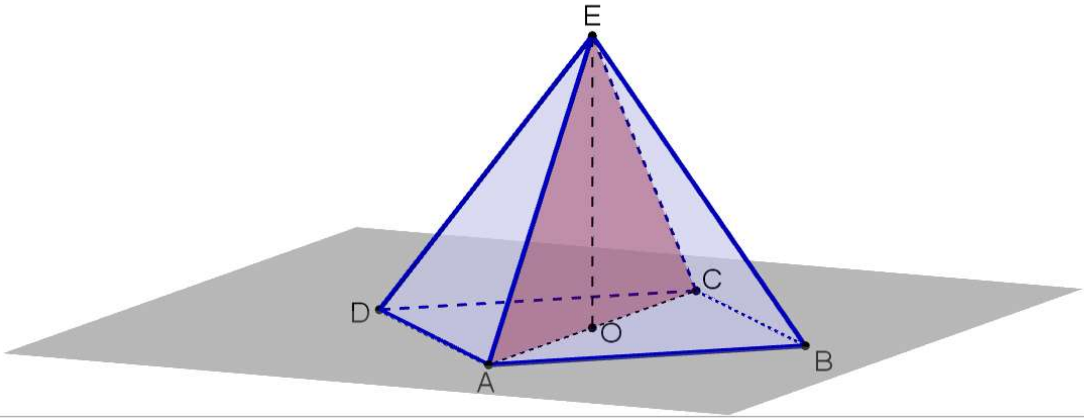


Solução

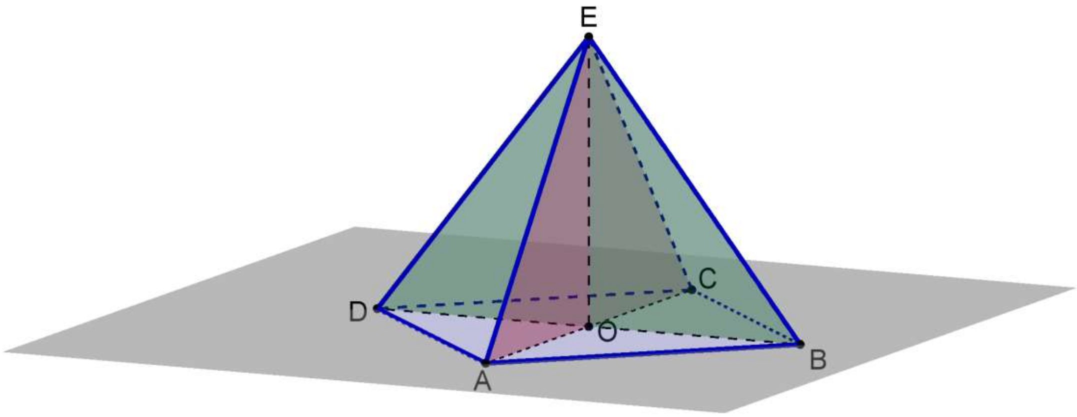
Sejam O, o centro da base $ABCD$ e E, o vértice da pirâmide.

O ponto O é médio da diagonal AC do quadrado.

Como $EA = EC$, no triângulo EAC a mediana EO é também altura e, portanto, é perpendicular a AC.

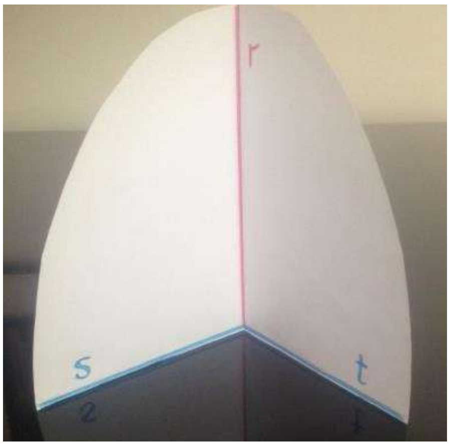


Pelos mesmos argumentos, o ponto O é médio de DB e o segmento EO é perpendicular a DB.



Então EO é perpendicular a duas retas concorrentes do plano $ABCD$ e, portanto, é perpendicular a esse plano.

Visualização do teorema de perpendicularismo usando papel.



Para terminar $OA = 2\sqrt{2}$ e no triângulo AOE temos: $h = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

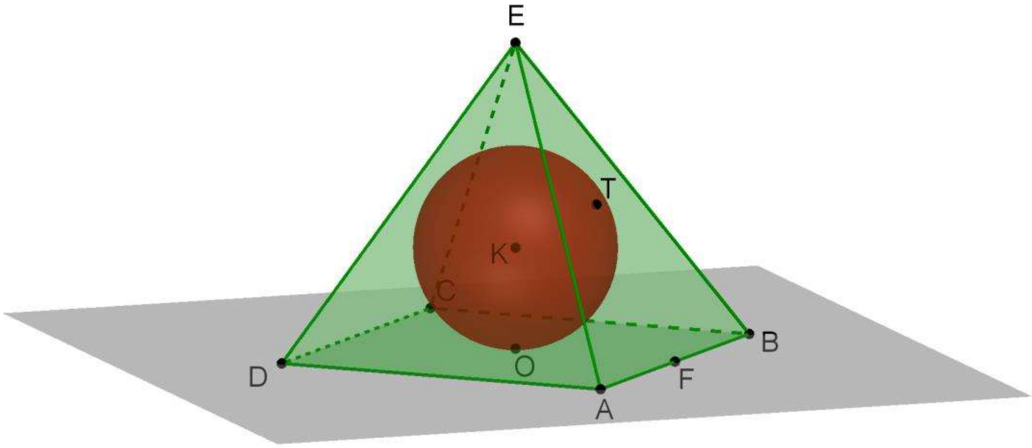
E o volume é

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{7} = \frac{32\sqrt{7}}{3}$$

Problema 2

A pirâmide regular $ABCD - E$ tem altura 4 e base quadrada de lado 6.

Qual é o raio de sua esfera inscrita?

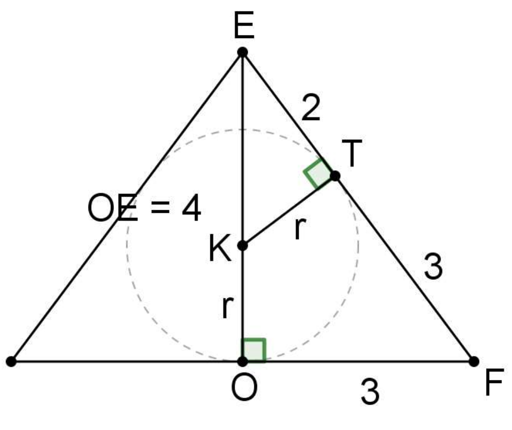


Solução

Na figura, o ponto O é o centro do quadrado $ABCD$ e F é o ponto médio da aresta AB.

Não é difícil imaginar o plano EOF.

Os alunos podem fazer o desenho a seguir.



No triângulo EOF temos $OF = 3$ e $OE = 4$. Logo, $EF = 5$.

Ainda, $FO = FO = 3$ e, portanto, $ET = 2$.

Da semelhança dos triângulos ETK e EOF temos

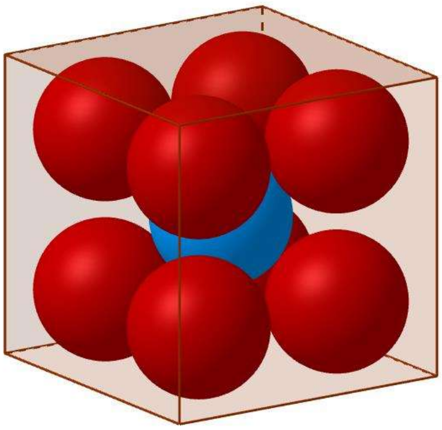
$$\frac{ET}{EO} = \frac{TK}{OF}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{r}{3} \quad \rightarrow \quad r = \frac{3}{2}$$

Problema 3

Dentro de um cubo de aresta 1 estão 9 esferas iguais. Uma delas (azul) tem centro no centro do cubo e as outras 8 (vermelhas) são tangentes à esfera central e a 3 faces do cubo, como mostra a figura.

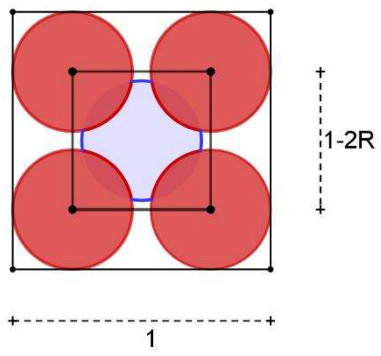
Qual é o raio dessas esferas?



Solução

Imagine o cubo cujos vértices são os centros das esferas vermelhas.

Quanto mede a aresta desse cubo?



Solução

Seja R o raio dessas esferas.

O cubo cujos vértices são os centros das esferas vermelhas tem aresta $1 - 2R$.

A diagonal desse cubo mede $4R$ e, por outro lado, mede a aresta multiplicada por $\sqrt{3}$.

Assim,

$$4R = (1 - 2R)\sqrt{3}$$

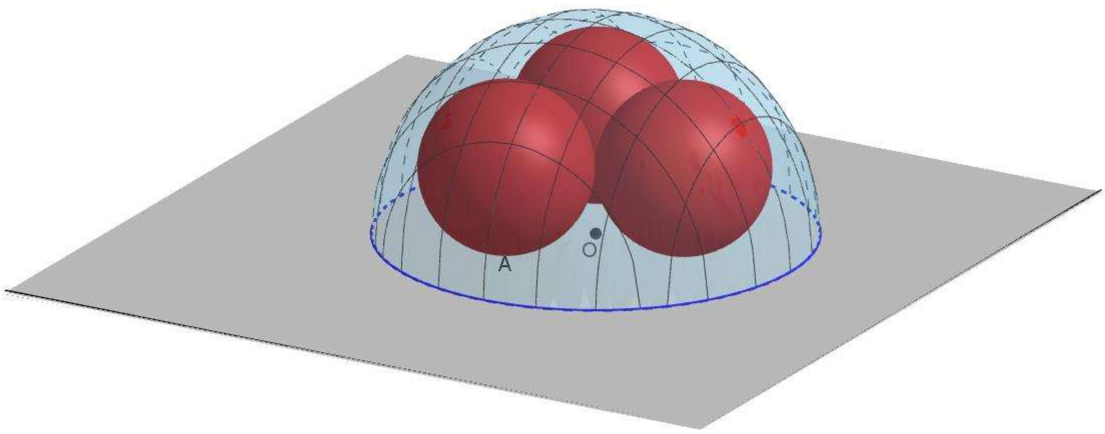
e, fazendo as contas encontramos

$$R = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2} \cong 0{,}232$$

Problema 4

Três esferas de 3 cm de raio cada uma são tangentes entre si duas a duas são tangentes internamente a um hemisfério e tangentes à base do hemisfério como mostra a figura abaixo.

Quanto mede o raio do hemisfério?



Continuaremos o assunto no próximo Papmem.