Funções e Modelagem

Paulo Cezar P. Carvalho

1. Introdução

O estudo das funções afins, quadráticas e exponenciais é central ao programa de Matemática do Ensino Médio. É comum os livros didáticos apresentarem problemas "contextualizados", em que essas funções aparecem modelando situações do cotidiano ou em ciência. No entanto, muitas vezes elas aparecem em enunciados do tipo: "... a grandeza y varia com a grandeza x por meio da função $y = 0{,}8x^2 - 3x + 1{,}2$", ou seja, em que a função envolvida aparece já dada. Nas verdadeiras aplicações, isto não acontece. É preciso selecionar a função adequada para modelar uma dada situação e obter seus coeficientes. É exatamente isto que faremos nesta aula: a partir de situações-problema, aprender a identificar que tipo de função é adequada para modelá-la.

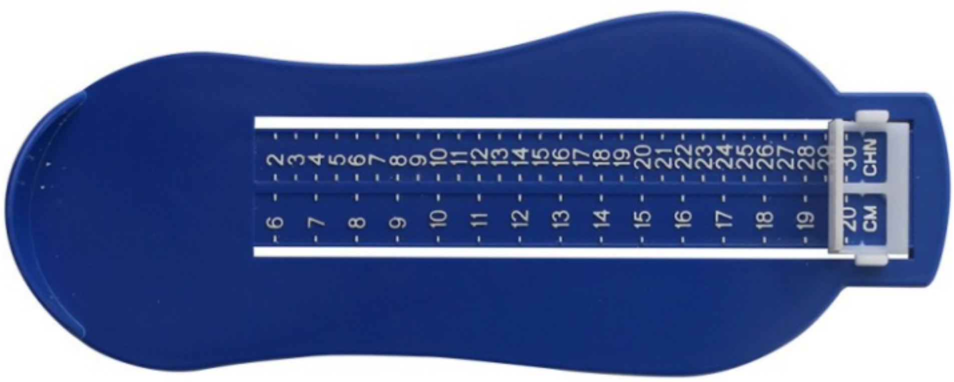
Para tal, utilizaremos os três problemas que descrevem situações realmente contextualizadas.

1. Uma pessoa tomou 60 mg de uma certa medicação. A bula do remédio informava que sua meia-vida era de seis horas. Como o paciente não sabia o significado da palavra, foi a um dicionário e encontrou a seguinte definição:

   Meia-vida: tempo necessário para que uma grandeza (física, biológica) atinja metade de seu valor inicial.

   a) A informação na bula sugere que a quantidade da medicação no organismo em função do tempo transcorrido seja dada por que tipo de função?
   b) Após 12 horas da ingestão da medicação, que quantidade dela ainda está presente no organismo? E 3 horas depois da ingestão? E t horas após a ingestão?

2. Em um site na internet, encontra-se um anúncio para o dispositivo da figura abaixo, que serve para determinar o número do calçado de crianças.



Examinando a figura, é possível determinar o tipo de função que fornece o número do calçado a partir do comprimento do pé, em cm? Qual é essa função?

3. Uma longa tira de papel, com espessura de 0,05 cm, é enrolada em torno de um cilindro de plástico com 4 cm de diâmetro, formando um cilindro com 12 cm de diâmetro.

Qual é o comprimento da tira de papel? De modo geral, qual é a função que associa o diâmetro do cilindro formado ao comprimento da tira?

Note que, em nenhum dos três problemas, aparece qual é a expressão da função a ser utilizada para modelar a situação. Como veremos a seguir, as três situações são descritas pelas funções estudadas no Ensino Médio. A chave para escolher o modelo adequado em cada caso é entender como se dá o crescimento (ou decrescimento) em cada uma das funções elementares. Ou seja, qual é o comportamento dos acréscimos $f(x + h) - f(x)$ para uma função f em cada classe.

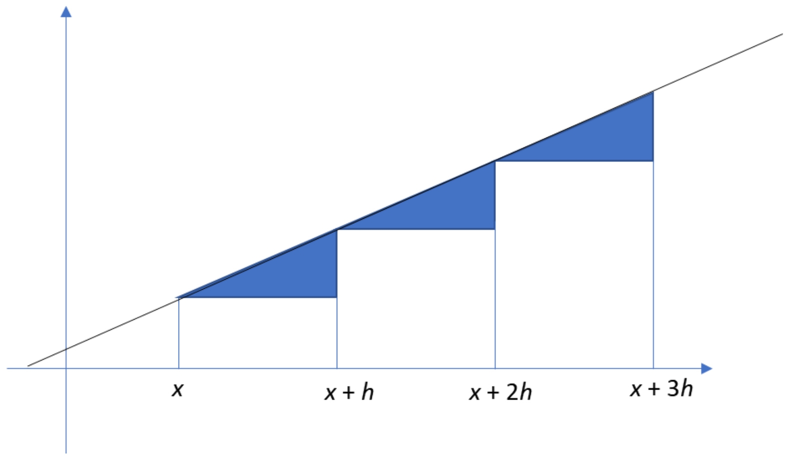
2. Funções afins

Uma função afim é uma função da forma $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais. A propriedade característica de uma função afim é a seguinte:

Se f é uma função afim, os *acréscimos* $f(x + h) - f(x)$ dependem apenas de h (e não de x). Em particular, a sequência formada por $f(x), f(x + h), f(x + 2h)$, ... é uma progressão aritmética.

A verificação é imediata: $f(x + h) - f(x) = a(x + h) + b - (ax + b) = ah$, ou seja, depende somente de h e não de x. Aplicando a propriedade para $x + h$ no lugar de x, temos $f(x + 2h) - f(x + h) = f((x + h) + h) - f(x + h) = f(x + h) - f(x) = ah$. Logo, a sequência acima forma uma progressão aritmética de razão ah. No caso particular em que $h = 1$, a razão da progressão é igual ao coeficiente a, que é a *taxa de variação* da função afim, ou seja, o valor constante de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. O coeficiente b, por sua vez, pode ser interpretado como o *valor inicial* da função (ou seja, o valor de $f(0)$).

Uma consequência disto é o que os pontos do gráfico da função afim de abscissas x, $x + h$, $x + 2h$ estão em uma mesma reta, pela congruência dos triângulos indicados na figura abaixo.

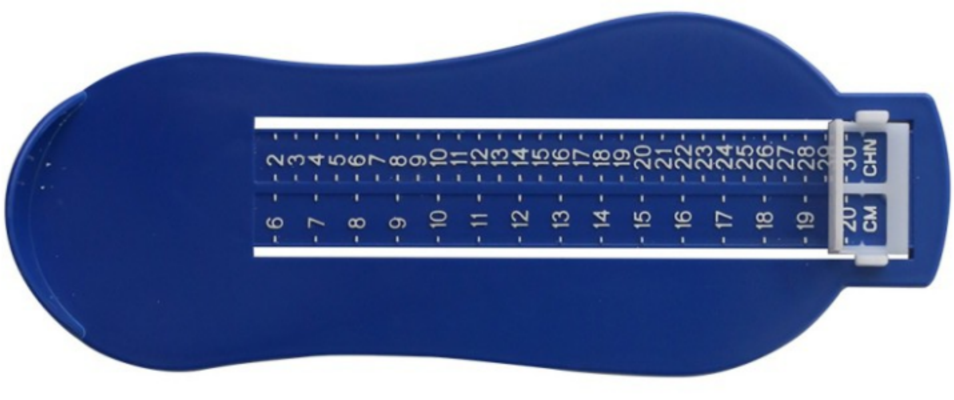


A recíproca da propriedade acima também é válida, desde que acrescentemos uma condição inicial sobre *f.* No livro a Matemática do Ensino Médio, vol. 1, p. 100, demonstra-se a seguinte propriedade recíproca:

Seja *f*: R →R uma função monótona injetiva (ou seja, estritamente crescente ou decrescente). Se o acréscimo *f*(*x* + *h*) – *f*(*x*) depender somente de *h* e não de *x*, então *f* é uma função afim.

Reflita, então, por alguns minutos e identifique qual das três situações descritas anteriormente é modelada por uma função afim.

A resposta é a situação 2. A razão é que os pontos correspondentes aos números inteiros de sapatos são igualmente espaçados, indicando que incrementos constantes no número do sapato correspondem a incrementos constantes no comprimento do pé. Isto, por sua vez, quer dizer que as funções relacionando estas grandezas, em ambos os sentidos, são afins.



Para encontrar a função *f* da forma *f*(*x*) = *ax* + *b* que associa o número do sapato ao comprimento do pé, basta utilizar dois pontos de correspondência. Observamos, por exemplo, que *f*(6) = 2 e *f*(7) = 4. Temos, então, o sistema

$$\begin{cases} 6a + b = 2 \\ 7a + b = 4 \end{cases}$$

Resolvendo-o, obtemos $a = 2$ e $b = -10$. Logo, a função desejada é $f(x) = 2x - 10$.

3. Funções do tipo exponencial

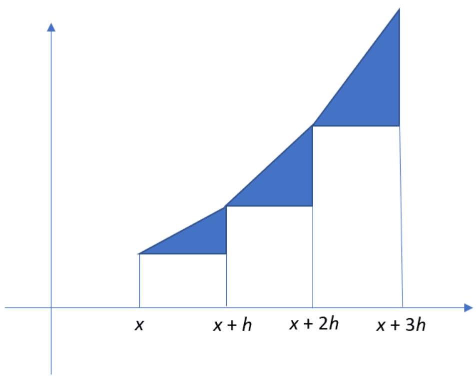
Uma função exponencial é uma função da forma $f(x) = a^x$, onde a é um número real positivo. Normalmente, supomos que $a \neq 1$, para evitar o caso trivial em que temos uma função constante e igual a 1. É mais interessante, para fins de modelagem de situações, considerarmos uma generalização das funções exponenciais, que consiste das funções da forma $f(x) = b\, a^x$, onde b é um número real, em geral positivo, que chamaremos de funções do tipo exponencial. Note que, analogamente ao que ocorre com as funções afins, b é o valor inicial da função, ou seja, $b = f(0)$.

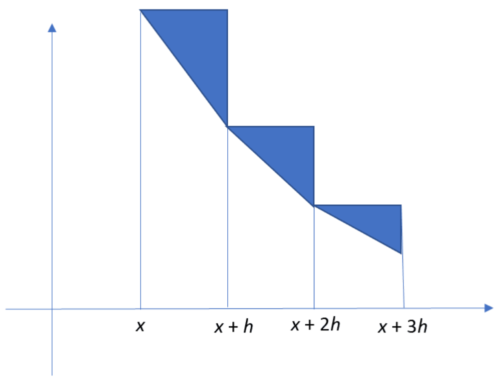
A propriedade característica de uma função do tipo exponencial é a seguinte:

Se f é uma função do tipo exponencial, as *razões de acréscimo* $f(x + h)\ /f(x)$ e os *acréscimos relativos* $[f(x + h) - f(x)]/f(x)$ dependem apenas de h (e não de x). Em particular, a sequência formada por $f(x)$, $f(x + h)$, $f(x + 2h)$, ... é uma progressão geométrica.

Novamente, a verificação é imediata. Temos $f(x + h)/f(x) = b\, a^{x+h} / b\, a^x = a^h$, que depende somente de h. Como $[f(x + h) - f(x)]/f(x) = f(x + h)/f(x) - 1 = a^h$, o acréscimo relativo também não depende de h. Além disso, $f(x + 2h)/f(x + h) = f(x + h) + h)/f(x + h) = a^h$, conforme já demonstrado. Em consequência, a sequência $f(x)$, $f(x + h)$, $f(x + 2h)$, ... é uma progressão geométrica.

O formato do gráfico de uma função do tipo exponencial é uma consequência dos fatos acima. De fato, ao plotar os pontos do gráfico de $f(x) = b\, a^x$ com abscissas x, $x + h$, $x + 2h$, ... os acréscimos são cada vez maiores (quando $a > 1$) ou os decréscimos são cada vez menores (quando $0 < a < 1$), fazendo com que, no primeiro caso, a função seja crescente com concavidade para cima e no segundo seja decrescente com concavidade para baixo.





Como no caso das funções afins, a recíproca da propriedade acima também é válida, desde que acrescentemos uma condição inicial sobre *f*. No livro a Matemática do Ensino Médio, vol. 1, p. 185, demonstra-se a seguinte propriedade recíproca:

Seja f: R → R uma função monótona injetiva (ou seja, estritamente crescente ou decrescente). Se a razão de acréscimo $f(x + h)\ /f(x)$(ou, equivalentemente, o acréscimo relativo $[f(x + h) - f(x)]/f(x)$ depender somente de h e não de x, então f é uma função do tipo exponencial.

Assim, funções do tipo exponencial modelam situações em que, aumentando o valor de uma grandeza em intervalos regulares, a outra fica multiplicada por um fator constante. É razoável, por exemplo, usar este tipo de modelo para o crescimento de uma população, pois é razoável esperar que, em intervalos de tempo constantes, o crescimento seja proporcional à população existente. Das três situações dadas no início, a situação 1 é aquela em que é adequado usar uma função do tipo exponencial, pois o enunciado informa que, em intervalos de tempo constantes, a quantidade de droga do organismo é multiplicada pelo mesmo fator. Em particular, o enunciado informa que, a cada 6 horas, a quantidade de droga é multiplicada por ½. Assim, 12 horas após a ingestão, a quantidade de droga é multiplicada por ½ duas vezes; ou seja, a quantidade restantes será 60 . ½ . ½ = 15 mg. Por outro lado, o fator de redução f a cada 3 horas pode ser encontrado observando que duas reduções por este fator correspondem a uma redução pelo fator ½; ou seja, $f \cdot f = ½$, que leva a $f = \sqrt{2}/2$. A quantidade restante após 3 horas será, portanto, $60 . \sqrt{2}/2 = 42{,}3$ g. Finalmente, para encontrar a expressão da função $f(t) = b\,a^t$ que fornece a quantidade de droga em mg após t horas, basta observar que $f(0) = 60$, ou seja $b = 60$, e que $f(6) = 30$, ou seja, $60.\ a^6 = 30$, que leva a $a = (1/2)^{1/6}$. Portanto, a função é dada por $f(t) = 60\ (1/2)^{t/6} = 60 . 2^{-t/6}$.

4. Funções quadráticas

Uma função quadrática é uma função da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$.

A propriedade característica de uma função quadrática é a seguinte:

Se f é uma função quadrática, os *acréscimos* $f(x + h) - f(x)$ dependem de x por meio de uma função afim. Em particular, a sequência formada por $f(x)$, $f(x + h)$, $f(x + 2h)$, ... é uma progressão aritmética de segunda ordem, ou seja, as diferenças entre termos consecutivos formam uma progressão aritmética.

De fato, $f(x + h) - f(x) = a(x + h)^2 + b(x + h) + c - ax^2 - bx - c = 2ahx + ah^2 + bh$, que é uma função afim de x (cujos coeficientes dependem de h).

Aplicando repetidamente aos acréscimos $f(x + h) - f(x)$, $f(x + 2h) - f(x + h)$, etc, temos

$$f(x + h) - f(x) = 2ahx + ah^2 + bh$$

$$f(x + 2h) - f(x + h) = 2ah(x + h) + ah^2 + bh = f(x + h) - f(x) + 2ah^2$$

$$f(x + 3h) - f(x + 2h) = 2ah(x + 2h) + ah^2 + bh = f(x + h) - f(x) + 4ah^2,$$

...

Assim os acréscimos formam uma progressão aritmética de razão $2ah^2$ e, em consequência, $f(x)$, $f(x + h)$, $f(x + 2h)$, ... é uma progressão aritmética de segunda ordem.

Assim, nas funções quadráticas, os acréscimos $f(x + h) - f(x)$, $f(x + 2h) - f(x + h)$, ... nem são constantes, como nas funções afins, nem são proporcionais a $f(x)$, como nas de tipo exponencial, mas formam uma progressão aritmética.

Novamente, vale uma propriedade recíproca, que pode ser encontrada na p. 149 de A Matemática do Ensino Médio, vol. 1.

Seja f: R → R uma função contínua. Se a sequência $f(x)$, $f(x + h)$, $f(x + 2h)$, ... é sempre uma progressão aritmética de segunda ordem, então f é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Das três situações dadas no início deste texto, a terceira é a qual se aplica uma função quadrática. A cada nova volta, o raio do cilindro formado pelo papel aumenta de um valor igual à espessura do papel. Portanto, os acréscimos da função f que associa o número de voltas ao comprimento total da tira de papel crescem, a cada volta, em progressão aritmética e, portanto, é uma função quadrática. Para encontra-la, observamos que:

Na primeira volta, o comprimento da tira é igual a $2\pi \, . \, 2 = 4\pi$.

Na segunda, o comprimento é igual a $2\pi \, . \, (2 + 0{,}05) = 4\pi + 0{,}1\pi$

Na terceira, o comprimento é igual a $2\pi \, . \, (2 + 0{,}01) = 4\pi + 0{,}2\pi$,

...

É formada, assim, uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 4π e cuja razão é $0{,}1\pi$. O comprimento total com n voltas é a soma dos n primeiros termos da progressão. Logo

$f(n) = \frac{4\pi+4\pi+(n-1).0{,}1\pi}{2}. \; n = 0{,}05\pi n^2 + 3{,}95\pi n$

Como a espessura total do rolo é 6 – 2 = 4 cm e o papel tem espessura de 0,05 cm, o rolo tem 4 / 0,05 = 80 voltas. Logo, o comprimento total é $0{,}05 \, . \, \pi \, . \, 80^2 + 7{,}95. \, \pi \, . \, 80 = 1998{,}053$, ou seja, cerca de 20 m.

De modo geral, se o cilindro externo tem diâmetro x, o rolo possui $(x – 4) /(2. 0{,}05) = 10 (x – 4)$ voltas e o comprimento é dado por $g(x) = 0{,}05\pi(10 (x – 4))^2 + 3{,}95\pi \, . \, 10 (x – 4) = 5 \pi (x – 4)^2 + 39{,}5 \pi (x – 4)$.