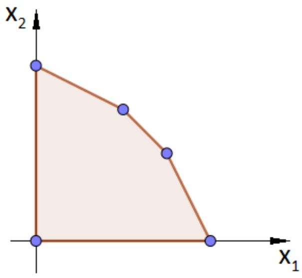
Problemas de otimização sem Cálculo
Programação Linear[1]

Prof. José Luiz Pastore Mello
3.1415rr@gmail.com

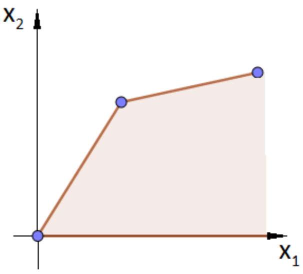
A programação linear (LP) é uma área de estudos da matemática que se ocupa da investigação de uma ampla e importante classe de problemas de otimização. Em um problema de PL temos uma função $f(x_1,x_2,...,x_n)$, denominada de função objetivo linear, definhada nas variáveis $x_1, x_2, \dots ,x_n$, também chamadas de variáveis de decisão ou de controle, que deverá ser maximizada ou minimizada quando sujeita a um número finito de restrições lineares e restrições de não negatividade.

As primeiras ideias matemáticas de PL foram investigadas e sistematizadas nos anos 1940 pelo matemático George Bernard Dantzig com a apresentação de um algoritmo eficiente para resolver esse tipo de problema, o algoritmo Simplex. Problemas de PL aparecem em diversos contextos aplicados como, por exemplo, no planejamento de redes de transporte (*flow network*), dietas nutricionais, produção e fracionamento de misturas na indústria etc.

Um problema de PL cuja função objetivo possui duas variáveis, $f(x_1,x_2)$, pode ser resolvido por meio de investigação gráfica no plano cartesiano. Em geral, as restrições são compostas por inequações cuja representação gráfica será ou uma região ilimitada, ou um polígono convexo.



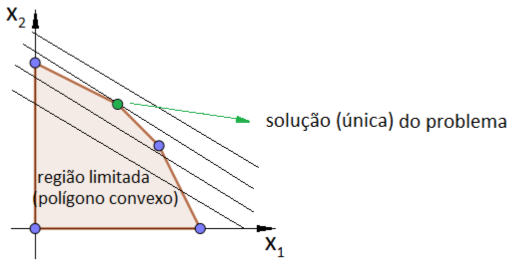
região limitada
(polígono convexo)



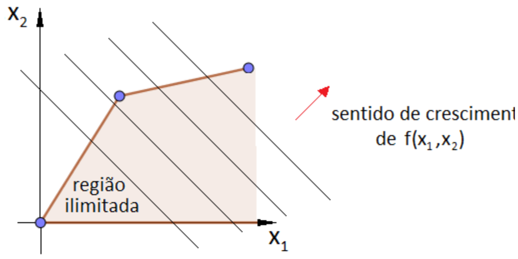
região ilimitada

Atribuindo valores à $f(x_1,x_2)$ encontramos um conjunto de retas paralelas, também chamadas de curvas de nível da função no plano dos eixos x_1 e x_2. A análise gráfica dessas retas, em conjunto com a região que define as restrições do problema, permite que a análise sobre a existência (ou não) e o número de soluções do problema. Por exemplo, em um problema em que estamos interessados em maximizar $f(x_1,x_2)$, estas são algumas situações possíveis:

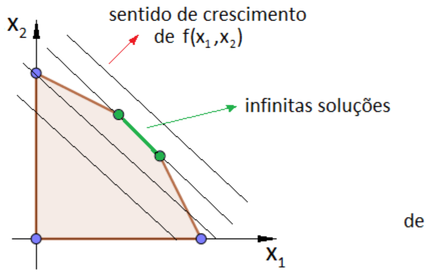
[1] Estas breves notas constituem uma síntese das principais ideias exploradas na vídeo-aula de mesmo título, realizada em janeiro de 2022 no PAPMEM-Impa.



Se existe apenas uma solução ótima, ela se encontra em um dos vértices do polígono convexo que define a região viável.

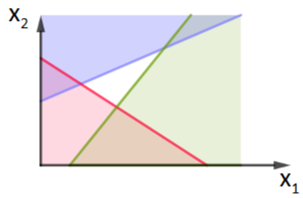


A região viável (restrições) apresenta pares (x_1, x_2) para o cálculo de $f(x_1, x_2)$, porém, não há um valor máximo da função objetivo. Nesse caso dizemos que a solução é indeterminada.



de

A inclinação das curvas de nível (retas paralelas) associada com a observação do sentido de crescimento de $f(x_1, x_2)$ permite observa que há infinitas soluções nesta situação



Nesta situação há pontos viáveis para investigação de $f(x_1, x_2)$ porque a intersecção das três restrições é vazi

Em alguns problemas de PL, nossas vaiáveis de decisão devem ser números inteiros não negativos. Nesse caso, o método de análise gráfica deve ser aplicado com critérios para encontrar o melhor par (x_1, x_2) de inteiros que otimize a função objetivo.

Todo problema de PL, que chamamos de problema Primal, pode ser associado a outro problema, que chamamos de problema Dual. O problema dual é definido com base nos dados do problema primal. Em um problema de maximização, o dual passa a ser visto como de minimização, e vice versa. Há inúmeras propriedades importantes a respeito do conceito de dualidade como, sendo a mais importante delas o teorema fundamental de dualidade, que diz: se em um par de problemas primal-dual um dos dois possuir solução ótima finita, então o outro também possuirá e, além disso, as duas funções objetivo possuirão o mesmo valor ótimo.

Referência bibliográfica

CUNHA, S. *Programação Linear*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2017.

KWONG, W. H. *Programação Linear, uma abordagem prática*. São Carlos/SP: EduFSCar, 2013.

YOSHIDA, L. K. *Programação Linear*. São Paulo: Atual Editora, 1987.