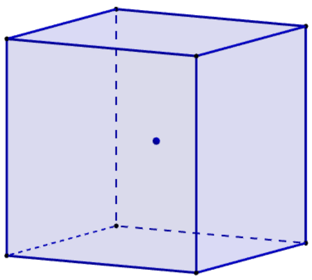
Geometria Espacial – visualização – 2ª parte

Continuamos nesta aula o tema que iniciamos em julho de 2021. Tanto no ensino presencial como no “a distância” a grande dificuldade que os alunos sentem em Geometria Espacial é a da representação das figuras. Isso faz com que o ensino dessa matéria fique restrito a aplicação de fórmulas de áreas e volumes dos sólidos principais e, o mais importante que são as diversas relações que existem entre os elementos de cada sólido não seja abordada.
Vamos abordar problemas bonitos com esferas, com o cubo e com o tetraedro regular que, com uma visualização adequada, os alunos poderão investigar e conseguir soluções utilizando, principalmente suas ferramentas básicas da geometria plana, ou seja, a semelhança de triângulos e as relações métricas no triângulo retângulo.

Comecemos com o

Cubo

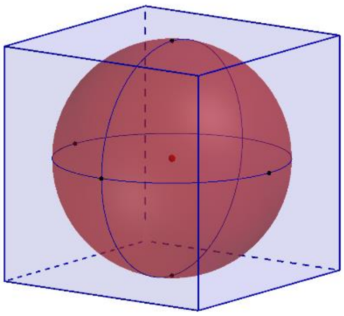


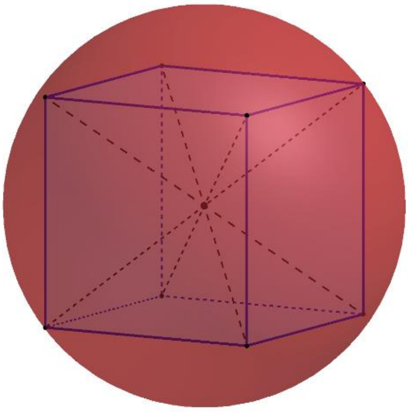
A figura ao lado mostra um cubo e o seu centro.
Esse ponto é equidistante de todas as faces, de todos os vértices e de todas as arestas

Isso sugere considerar no cubo suas esferas associadas principais.

A *esfera inscrita* é tangente a todas as faces. Se o cubo tem aresta a então o raio da esfera inscrita é

$$r = \frac{a}{2}$$



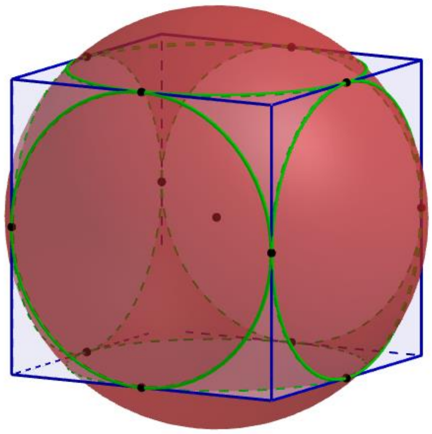


A *esfera circunscrita* passa por todos os vértices.
Se o cubo tem aresta a então o raio da esfera circunscrita é metade de uma diagonal, ou seja,

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Existe uma terceira esfera interessante que é a *esfera tangente às arestas* do cubo.
Se o cubo tem aresta a então o raio da esfera tangente às arestas é metade da diagonal de uma face, ou seja,

$$\rho = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



Em seguida, dois problemas.

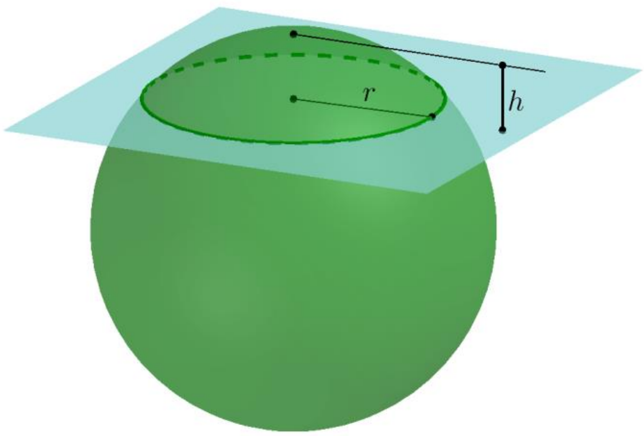
Problema 1

Considere o cubo com aresta $a = 2$ e sua esfera tangente às arestas.
Qual é a área da parte da superfície esférica que é exterior ao cubo?

Problema 2

O volume da parte da esfera que está no interior do cubo, que porcentagem representa do volume do cubo?

Para responder a essas curiosas perguntas precisamos antecipar alguns resultados.



A figura acima mostra uma esfera cortada por um plano. Considere:

$$R = \text{raio da esfera}$$

$$r = \text{raio da base da calota (ou do segmento esférico)}$$

$$h = \text{altura da calota (ou do segmento esférico)}$$

Dados:

Área		Volume	
Esfera	$4\pi R^2$	Esfera	$\frac{4}{3}\pi R^3$
Calota	$2\pi Rh$	Segmento esférico	$\frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2)$

Podemos então resolver os dois problemas propostos.

Problema 1 – solução

A parte da esfera exterior ao cubo é formada por 6 calotas. O raio da esfera é $\rho = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ e a altura da calota é

$$h = \rho - \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

A área S da parte da superfície esférica que é exterior ao cubo é a área de 6 calotas do tipo descrito acima.

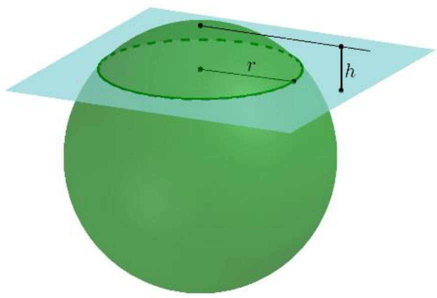
$$S = 6 \cdot 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right) = 3\pi a^2(\sqrt{2} - 1)$$

Com aresta $a = 2$ essa área é

$$3\pi 2^2\left(\sqrt{2} - 1\right) = 12\pi\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

Observe que essa área é aproximadamente igual a 15,6 enquanto a área total do cubo é 24.

Problema 2 – solução

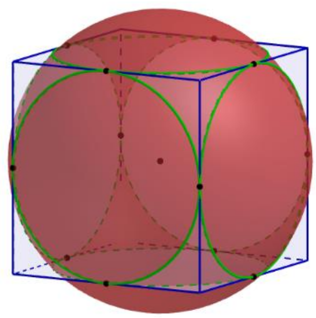


Aresta do cubo: $a = 2$.

Raio da esfera: $\rho = \sqrt{2}$

Raio da base do segmento esférico: $r = 1$

Altura do segmento esférico: $h = \sqrt{2} - 1$



Volume de um dos segmentos esféricos:

$$v = \frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2)$$

$$v = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(3 \cdot 1^2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)^2\right)$$

Etc.

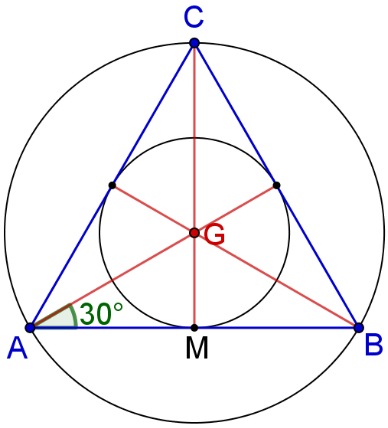
O volume da parte da esfera que está no interior do cubo, representa, aproximadamente, 92% do volume do cubo?

Continuamos com o

Tetraedro regular

Alunos e professores, em geral, não se sentem confortáveis com o tetraedro regular. Entretanto, fazendo uma boa recordação das propriedades do triângulo equilátero teremos uma boa oportunidade de aplicar semelhança de triângulos para obter resultados novos e interessantes. Isso é possível e não é difícil com uma boa visualização das situações.
Em primeiro lugar, uma recordação do

Triângulo equilátero



$AB = BC = CA = a =$ lado do triângulo ABC.

$AM = BN = CP = h =$ altura do triângulo ABC.

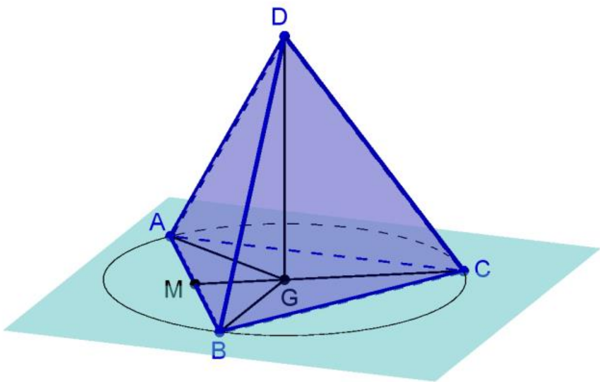
Justificar:

- Uma mediana é também uma altura
- $\angle GBM = 30°$ (congruência)
- $GA = GB = GC$ (congruência)
- $GA = 2 \cdot GM$ $(\Delta\ 30°, 60°, 90°)$

Calcular:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad GM = r = \frac{1}{3}h \qquad GA = R = \frac{2}{3}h$$

Visualize o tetraedro regular.



Considere $GD \perp Pl(ABC)$

Mostre que para qualquer D

nessa perpendicular,

$$DA = DB = DC$$

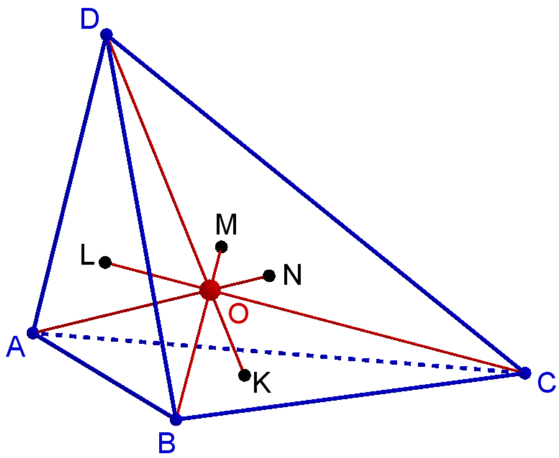
Considere $DA = AB = a$

No triângulo DGC, por exemplo e usando o comprimento de GC calcule a altura do tetraedro regular:

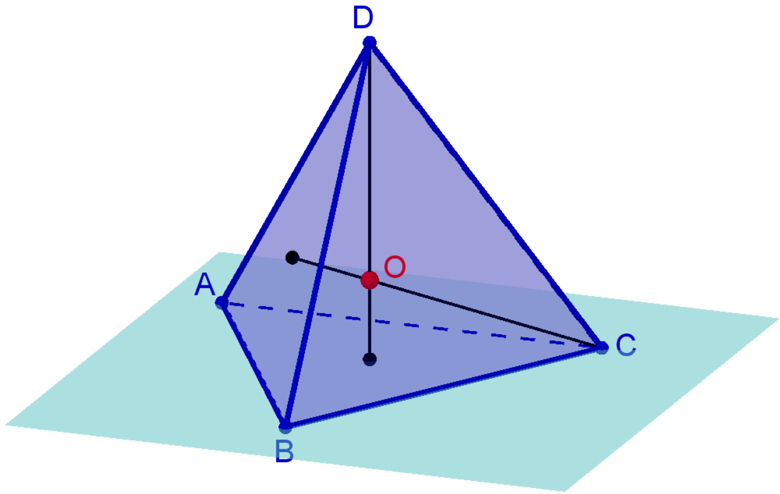
$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Informações

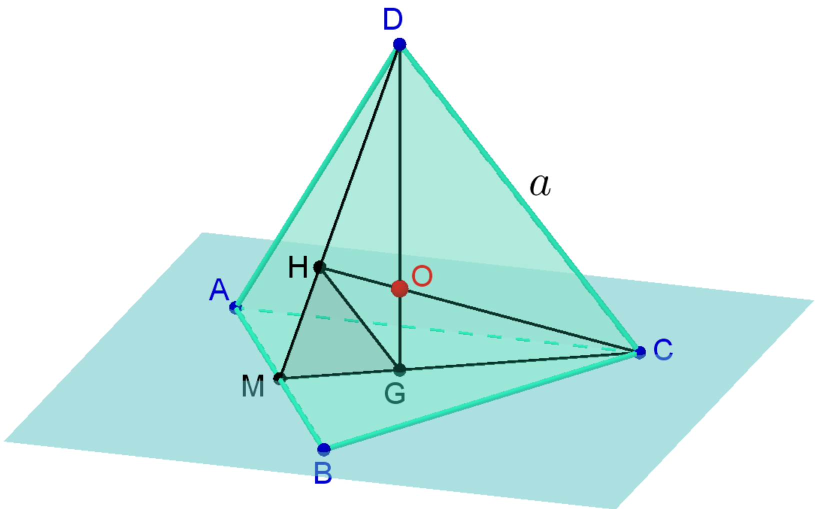
a) Em um tetraedro, cada segmento que une um vértice ao baricentro da face oposta é uma *mediana* do tetraedro. As quatro medianas de um tetraedro encontram-se em um ponto (O) que é o baricentro do tetraedro.



b) No tetraedro regular cada *mediana* é também uma *altura*.



Veja, então,
duas alturas e o ponto (O) de interseção delas. Esse ponto é o centro do tetraedro, ou seja, equidistante de todas as faces e, também, de todos os vértices e de todas as arestas. Vamos determinar sua localização.

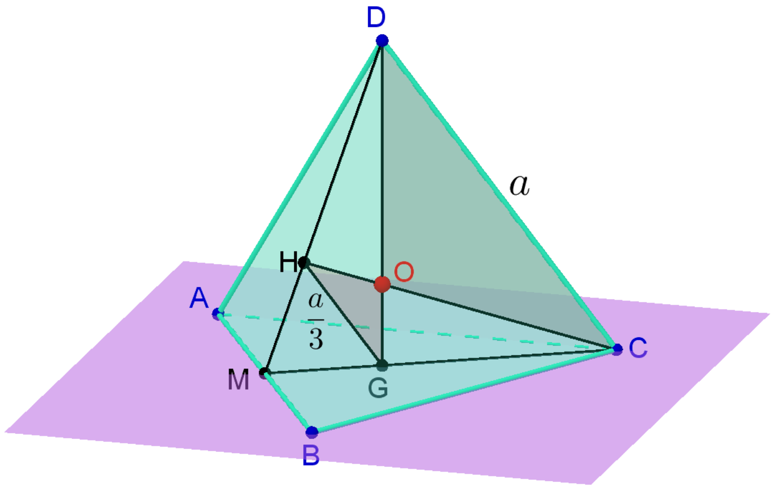


$$\Delta MGH \sim \Delta MCD$$

$$\frac{MG}{MC} = \frac{MH}{MD} = \frac{1}{3}$$

Logo,

$$GH = \frac{CD}{3} = \frac{a}{3}$$



$$\Delta OGH \sim \Delta ODC$$

$$\frac{HG}{CC} = \frac{1}{3}$$

Logo

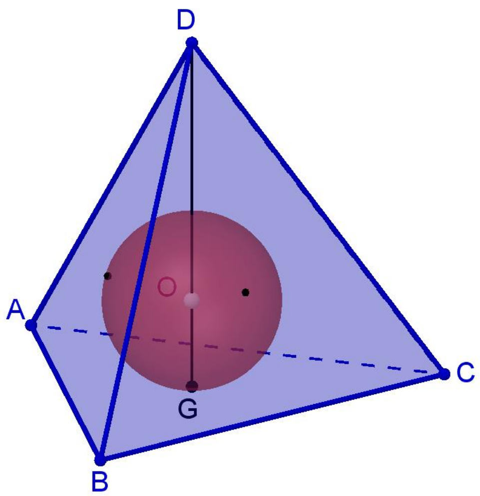
$$\frac{OG}{OD} = \frac{1}{3}$$

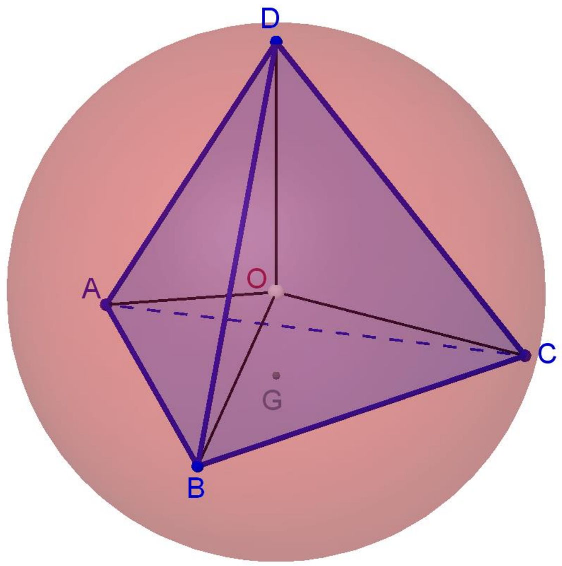
Sendo $DG = h$,

$$OG = \frac{1}{4}h$$

$$OD = \frac{3}{4}h$$

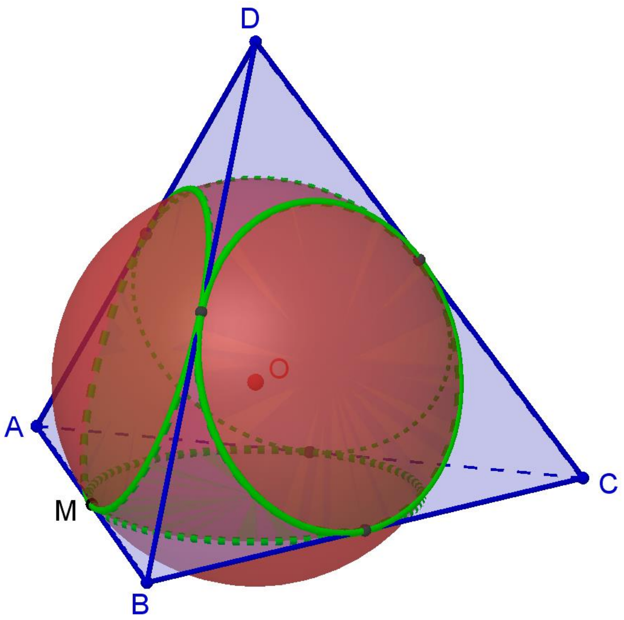
Podemos então visualizar as esferas inscrita e circunscrita ao tetraedro regular.



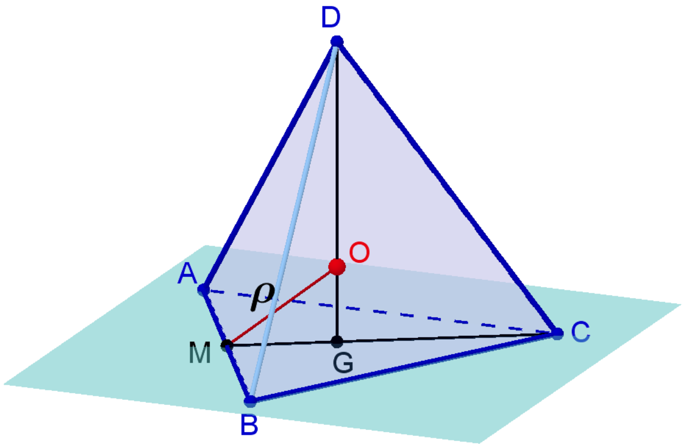


Problema 3

Em um tetraedro regular de aresta a calcule o raio de sua esfera medial.



Solução do Problema 3



$$DG = h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$OG = \frac{1}{4}h = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

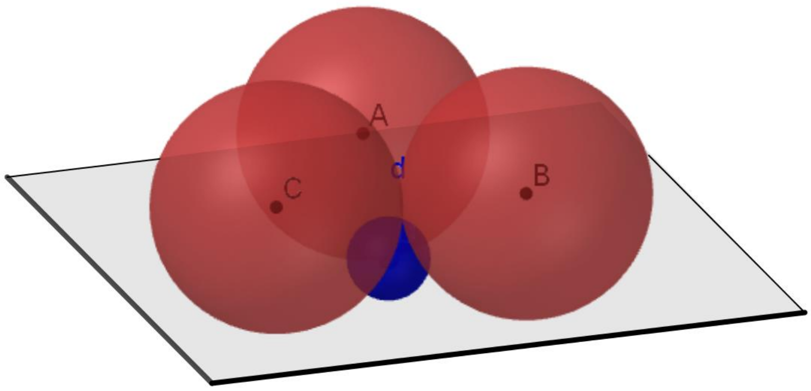
$$MG = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

O teorema de Pitágoras no triângulo OGM, retângulo em G fornece:

$$\rho = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Problema 4

Três esferas de raio 1 são tangentes entre si duas a duas e são tangentes a um plano Π. Determine o raio da esfera que é tangente ao plano Π e às três esferas iguais.

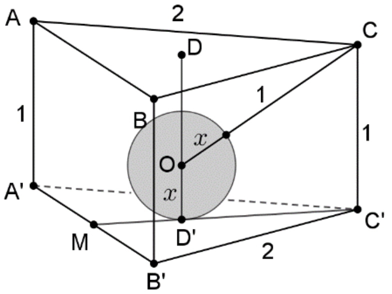


Solução do Problema 4

Os centros das esferas grandes são A, B e C. Os pontos de tangência delas com o plano Π são A', B' e C', respectivamente.

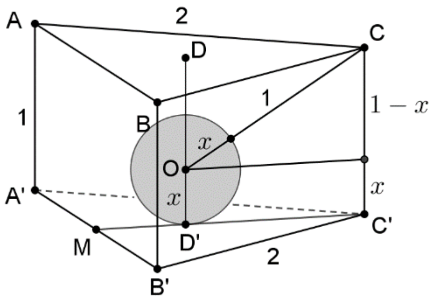
Torne as esferas invisíveis. Os centros e os pontos de tangência formam um prisma regular $ABC - A'B'C'$. Sejam D e D' os centros das bases do prisma e O o centro da esfera pequena que, naturalmente, pertence ao segmento DD'.

Seja x o raio da esfera pequena.



Observe que, como D' é o centro do triângulo $A'B'C'$, então

$$D'C' = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



Traçando por O uma paralela a $D'C'$ formamos o triângulo retângulo que resolve o problema.

$$(1 + x)^2 = (1 - x)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Pergunta

Qual é o volume do maior tetraedro regular que se pode colocar dentro de um cubo de aresta 1?

Resposta

$$V = \frac{1}{3}$$