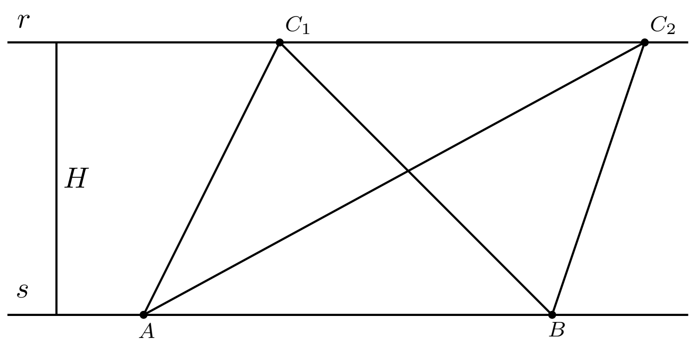
Teorema 1. Sejam r e s retas paralelas. Sejam A e B pontos distintos sobre a reta s e C_1 e C_2 pontos distintos sobre a reta r. Então, $[ABC_1] = [ABC_2]$.

Demonstração. O resultado é imediato pois $[ABC_1] = [ABC_2] = \dfrac{AB \cdot H}{2}$.



Teorema 2. Seja ABC um triângulo e D, E e F pontos sobre os lados BC, CA e AB tais que AD, BE e CF são concorrentes no ponto P. Defina $K = [ABC]$, $K_A = [PBC]$, $K_B = [PCA]$ e $K_C = [PAB]$. Como $K = K_A + K_B + K_C$, então

(a)

$$\frac{BD}{DC} = \frac{K_C}{K_B}, \ \frac{CE}{EA} = \frac{K_A}{K_C} \text{ e } \frac{AF}{FB} = \frac{K_B}{K_A}.$$

(b)

$$\frac{AP}{PD} = \frac{K_B + K_C}{K_A}, \ \frac{BP}{PE} = \frac{K_A + K_C}{K_B} \text{ e } \frac{CP}{PF} = \frac{K_A + K_B}{K_C}$$

Demonstração. (a) Temos que

$$\frac{BD}{CD} = \frac{[ABD]}{[ACD]} = \frac{[BPD]}{[CPD]} = \frac{[ABD] - [BPD]}{[ACD] - [CPD]} = \frac{[APB]}{[ACP]} = \frac{K_C}{K_B}.$$

Da mesma maneira demonstra - se que $\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{K_A}{K_C}$ e $\dfrac{AF}{FB} = \dfrac{K_B}{K_A}$.

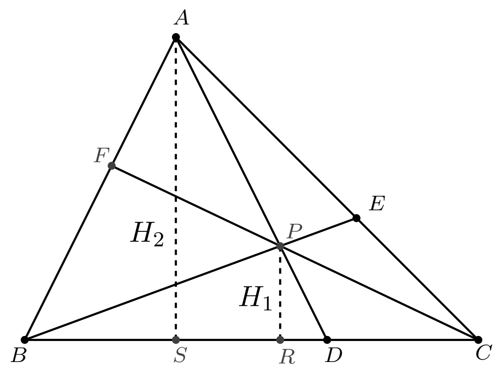
(b) Temos que

$$\Delta ADS \sim \Delta PDR \Rightarrow$$

$$\frac{AD}{PD} = \frac{H_2}{H_1} = \frac{[ABC]}{[BPC]} = \frac{K_A + K_B + K_C}{K_A} \Leftrightarrow$$

$$\frac{AP}{PD} = \frac{K_B + K_C}{K_A}.$$

Da mesma maneira demonstra - se que $\dfrac{BP}{PE} = \dfrac{K_A + K_C}{K_B}$ e $\dfrac{CP}{PF} = \dfrac{K_A + K_B}{K_C}$.



Teorema 3. (**van Aubel**) Seja ABC um triângulo e sejam D, E e F pontos sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente, tais que AD, BE e CF são concorrentes. Então

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}.$$

Demonstração. Do teorema 2 temos que

$$\frac{AP}{PD} = \frac{K_B + K_C}{K_A} = \frac{K_B}{K_A} + \frac{K_C}{K_A} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}.$$