$\{\sup_{n\to\infty} f(\sigma^n \underline{\theta}),\ \underline{\theta} \in \Sigma\}$. O espectro de Markov M tem a seguinte interpretação aritmética:

$$\left\{ \left(\inf_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0)} |f(x,y)| \right)^{-1},\ f(x,y) = ax^2+bxy+cy^2,\ b^2-4ac=1 \right\}.$$

São fatos conhecidos que L e M são subconjuntos fechados da reta e que $L \subset M$ (ver [48]). Na referência [123] são provados resultados sobre propriedades geométricas (relativas a geometria fractal) dos espectros de Markov e Lagrange, que envolvem resultados delicados sobre somas de conjuntos de Cantor regulares.

Problemas Propostos

3.1. *Seja n um número natural. Determine os possíveis valores de x tais que $\frac{1}{x} = [1, 1, \ldots, 1, x]$, onde aparecem n uns na fração contínua.*

3.2. *Seja*

$$\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{\ddots\, 2 + \cfrac{(2n-3)^2}{2}}}}}$$

a n-ésima convergente da fração contínua

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{\ddots}}}}}$$

Demonstre que $\frac{p_n}{q_n} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$.

3.3. *Demonstre que, para todo inteiro positivo a, temos as seguintes expansões em frações contínuas periódicas:*

(a) $\sqrt{a^2+1} = [a, \overline{2a}]$.

(b) $\sqrt{a^2-1} = [a-1, \overline{1, 2a-2}]$.

(c) $\sqrt{a^2-2} = [a-1, \overline{1, a-2, 1, 2a-2}]$.

(d) $\sqrt{a^2-a} = [a-1, \overline{2, 2a-2}]$.

3.4. *Encontre as frações contínuas de* $\sqrt{a^2+4}$ *e* $\sqrt{a^2-4}$.

3.5. *Seja* $\alpha=[a_0; a_1, a_2, \dots]\in\mathbb{R}$. *Prove que, se* $q_n \le q < q_{n+1}, \operatorname{mdc}(p,q)=1$ *e* $p/q \ne p_n/q_n$ *então* $|\alpha - p/q| \le |\alpha - p_n/q_n|$ *se, e somente se,* $\frac{p}{q} = \frac{p_{n+1}-rp_n}{q_{n+1}-rq_n}$, *onde* $r \in \mathbb{N}$ *é tal que vale uma das seguintes condições:*

(i) $0 < r < a_{n+1}/2$;

(ii) $r = a_{n+1}/2$ *e* $\alpha_{n+2}\beta_{n+1} \ge 1$.

3.6. *Seja* $\alpha=[a_0; a_1, a_2, \dots]\in\mathbb{R}$. *Prove que, se* $q_n \le q < q_{n+1}, \operatorname{mdc}(p,q)=1$ *e* $p/q \ne p_n/q_n$ *então* $|\alpha - p/q| < 1/q^2$ *se, e somente se vale pelo menos uma das seguintes condições:*

(i) $a_{n+1} \ge 2$, $\frac{p}{q} = \frac{p_{n+1}-p_n}{q_{n+1}-q_n}$ *e* $a_{n+1} - 2 + \beta_{n+1} < \alpha_{n+2}$;

(ii) $a_{n+1} \ge 2$, $\frac{p}{q} = \frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}$ *e* $(\alpha_{n+1}-2)\beta_{n+1} < 1$.

3.7. *Seja* $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ *um número real.*

(a) Prove que, se $\operatorname{ord}\alpha > 2$ *então existe* $\lambda > 1$ *tal que, para infinitos inteiros positivos* n, *temos* $a_n \ge \lambda^n$.

(b) Prove que $\operatorname{ord}\alpha \ge 1 + \exp(\limsup_{n\to\infty} \frac{\log\log(a_n+1)}{n})$.

(c) Mostre que, para todo $c \ge 2$, *existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $\operatorname{ord}\alpha = 1 + \exp(\limsup_{n\to\infty} \frac{\log\log(a_n+1)}{n}) = c$.

(d) Determine $\operatorname{ord}\alpha$ *se* $a_n = 2^n, \forall n \ge 0$.

3.8. *Prove que, para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\limsup_{n\to+\infty} \cos^n(n\alpha) = 1$.

3.9. *Este exercício, baseado em [38], tem como objetivo calcular a fração contínua de* e.

(a) São dadas as sequências (A_n), (B_n) *e* (C_n) *definidas por*

$$A_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x \, dx,$$
$$B_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!} e^x \, dx,$$
$$C_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!} e^x \, dx.$$

Mostre que para todo $n \geq 1$ *valem as relações*

(i) $A_n + B_{n-1} + C_{n-1} = 0,$

(ii) $B_n + 2nA_n - C_{n-1} = 0,$

(iii) $A_n - B_n + C_n = 0.$

(b) Dadas as sequências $\{p_n\}$ *e* $\{q_n\}$ *definidas recursivamente como* $p_0 = 2, q_0 = 1$, $p_1 = 3, q_1 = 1$ *e, para todo* $n \geq 1$,

$$p_{3n-1} = 2np_{3n-2} + p_{3n-3}, \qquad q_{3n-1} = 2nq_{3n-2} + q_{3n-3}$$
$$p_{3n} = p_{3n-1} + p_{3n-2}, \qquad q_{3n} = q_{3n-1} + q_{3n-2}$$
$$p_{3n+1} = p_{3n} + p_{3n-1}, \qquad q_{3n+1} = q_{3n} + q_{3n-1}$$

Mostre por indução que para todo $n \geq 1$ *se verificam as relações*

$$A_n = q_{3n-2}e - p_{3n-2}, \quad B_n = p_{3n-1} - q_{3n-11}e, \quad e \quad C_n = p_{3n} - q_{3n}e.$$

(c) Mostre que

$$e = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots, 1, 1, 2n, \ldots].$$

3.10. *Prove que*

$\left|e - \frac{p}{q}\right| < \frac{\log\log q}{2q^2 \log q}$ *tem infinitas soluções* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, *mas, para todo* $\varepsilon > 0$,

$\left|e - \frac{p}{q}\right| < \frac{\log\log q}{(2+\varepsilon)q^2 \log q}$ *tem apenas um número finito de soluções* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

3.11. *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a sequência definida por* $a_n = n\sqrt{5} - \lfloor n\sqrt{5} \rfloor$. *Determine os valores de* $n \leq 2011$ *tais que* a_n *seja respectivamente máximo e mínimo.*

3.12. *Mostre que se* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *decrescente e*

$$k_f(\alpha) := \sup \left\{ k > 0 \;\middle|\; \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{f(q)}{k} \text{ tem infinitas soluções racionais } \frac{p}{q} \right\}$$

então, caso tenhamos $\lim_{q\to+\infty} q^2 f(q) = 0$, *a imagem de* k_f *é* $(0, +\infty]$ *(ou* $[0, +\infty]$, *se consideramos* $\sup(\emptyset) = 0$ *neste contexto) e, caso* $\lim_{q\to+\infty} q^2 f(q) = +\infty$, *então a imagem de* k_f *é* $\{+\infty\}$.

3.13. *Dizemos que dois números irracionais* α *e* β *são* $GL_2(\mathbb{Z})$*-equivalentes se existem inteiros* a, b, c, d *com* $|ad - bc| = 1$ *tais que* $\beta = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$.

Mostre que, se as frações contínuas de α *e* β *são* $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ *e* $\beta = [b_0; b_1, b_2, \dots]$ *então* α *e* β *são* $GL_2(\mathbb{Z})$*-equivalentes se, e somente se, existem* $r \in \mathbb{Z}$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tais que* $b_n = a_{n+r}, \forall n \geq n_0$.

Conclua que $k(\alpha) = k(\beta)$ *sempre que* α *e* β *são* $GL_2(\mathbb{Z})$*-equivalentes.*

3.14. *Use o fato de que* $C(4) + C(4) = [\sqrt{2} - 1, 4(\sqrt{2} - 1)]$ *e a fórmula para* $k(\alpha)$ *para mostrar que* $L \supset [6, +\infty)$.