

$\{\sup_{n \rightarrow \infty} f(\sigma^n \underline{\theta}), \underline{\theta} \in \Sigma\}$. O espectro de Markov M tem a seguinte interpretação aritmética:

$$\left\{ \left(\inf_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} |f(x,y)| \right)^{-1}, f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2, b^2 - 4ac = 1 \right\}.$$

São fatos conhecidos que L e M são subconjuntos fechados da reta e que $L \subset M$ (ver [48]). Na referência [123] são provados resultados sobre propriedades geométricas (relativas a geometria fractal) dos espectros de Markov e Lagrange, que envolvem resultados delicados sobre somas de conjuntos de Cantor regulares.

Problemas Propostos

3.1. *Seja n um número natural. Determine os possíveis valores de x tais que $\frac{1}{x} = [1, 1, \dots, 1, x]$, onde aparecem n uns na fração contínua.*

3.2. *Seja*

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{\dots 2 + \frac{(2n-3)^2}{2}}}}}$$

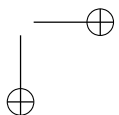
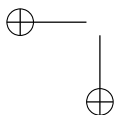
a n -ésima convergente da fração contínua

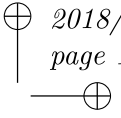
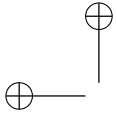
$$\frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{\dots}}}}}$$

Demonstre que $\frac{p_n}{q_n} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$.

3.3. *Demonstre que, para todo inteiro positivo a , temos as seguintes expansões em frações contínuas periódicas:*

(a) $\sqrt{a^2 + 1} = [a, \overline{2a}].$





(b) $\sqrt{a^2 - 1} = [a - 1, \overline{1, 2a - 2}]$.

(c) $\sqrt{a^2 - 2} = [a - 1, \overline{1, a - 2, 1, 2a - 2}]$.

(d) $\sqrt{a^2 - a} = [a - 1, \overline{2, 2a - 2}]$.

3.4. Encontre as frações contínuas de $\sqrt{a^2 + 4}$ e $\sqrt{a^2 - 4}$.

3.5. Seja $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R}$. Prove que, se $q_n \leq q < q_{n+1}$, $\text{mdc}(p, q) = 1$ e $p/q \neq p_n/q_n$ então $|\alpha - p/q| \leq |\alpha - p_n/q_n|$ se, e somente se, $\frac{p}{q} = \frac{p_{n+1} - r p_n}{q_{n+1} - r q_n}$, onde $r \in \mathbb{N}$ é tal que vale uma das seguintes condições:

(i) $0 < r < a_{n+1}/2$;

(ii) $r = a_{n+1}/2$ e $\alpha_{n+2} \beta_{n+1} \geq 1$.

3.6. Seja $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R}$. Prove que, se $q_n \leq q < q_{n+1}$, $\text{mdc}(p, q) = 1$ e $p/q \neq p_n/q_n$ então $|\alpha - p/q| < 1/q^2$ se, e somente se vale pelo menos uma das seguintes condições:

(i) $a_{n+1} \geq 2$, $\frac{p}{q} = \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$ e $a_{n+1} - 2 + \beta_{n+1} < \alpha_{n+2}$;

(ii) $a_{n+1} \geq 2$, $\frac{p}{q} = \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}$ e $(\alpha_{n+1} - 2)\beta_{n+1} < 1$.

3.7. Seja $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ um número real.

(a) Prove que, se $\text{ord } \alpha > 2$ então existe $\lambda > 1$ tal que, para infinitos inteiros positivos n , temos $a_n \geq \lambda^n$.

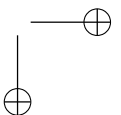
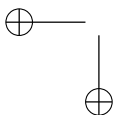
(b) Prove que $\text{ord } \alpha \geq 1 + \exp(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log(a_n + 1)}{n})$.

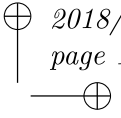
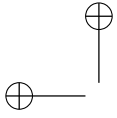
(c) Mostre que, para todo $c \geq 2$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\text{ord } \alpha = 1 + \exp(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log(a_n + 1)}{n}) = c$.

(d) Determine $\text{ord } \alpha$ se $a_n = 2^n, \forall n \geq 0$.

3.8. Prove que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \cos^n(n\alpha) = 1$.

3.9. Este exercício, baseado em [38], tem como objetivo calcular a fração contínua de e .





(a) São dadas as seqüências (A_n) , (B_n) e (C_n) definidas por

$$A_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x dx,$$

$$B_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!} e^x dx,$$

$$C_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!} e^x dx.$$

Mostre que para todo $n \geq 1$ valem as relações

(i) $A_n + B_{n-1} + C_{n-1} = 0,$

(ii) $B_n + 2nA_n - C_{n-1} = 0,$

(iii) $A_n - B_n + C_n = 0.$

(b) Dadas as seqüências $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ definidas recursivamente como $p_0 = 2, q_0 = 1, p_1 = 3, q_1 = 1$ e, para todo $n \geq 1,$

$$p_{3n-1} = 2np_{3n-2} + p_{3n-3}, \quad q_{3n-1} = 2nq_{3n-2} + q_{3n-3}$$

$$p_{3n} = p_{3n-1} + p_{3n-2}, \quad q_{3n} = q_{3n-1} + q_{3n-2}$$

$$p_{3n+1} = p_{3n} + p_{3n-1}, \quad q_{3n+1} = q_{3n} + q_{3n-1}$$

Mostre por indução que para todo $n \geq 1$ se verificam as relações

$$A_n = q_{3n-2}e - p_{3n-2}, \quad B_n = p_{3n-1} - q_{3n-1}e, \quad e \quad C_n = p_{3n} - q_{3n}e.$$

(c) Mostre que

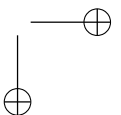
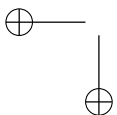
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots, 1, 1, 2n, \dots].$$

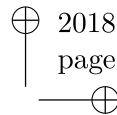
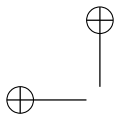
3.10. Prove que

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| < \frac{\log \log q}{2q^2 \log q} \text{ tem infinitas soluções } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ mas, para todo } \varepsilon > 0,$$

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| < \frac{\log \log q}{(2 + \varepsilon)q^2 \log q} \text{ tem apenas um número finito de soluções } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

3.11. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a seqüência definida por $a_n = n\sqrt{5} - \lfloor n\sqrt{5} \rfloor$. Determine os valores de $n \leq 2011$ tais que a_n seja respectivamente máximo e mínimo.





3.12. *Mostre que se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ decrescente e*

$$k_f(\alpha) := \sup \left\{ k > 0 \mid \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{f(q)}{k} \text{ tem infinitas soluções racionais } \frac{p}{q} \right\}$$

então, caso tenhamos $\lim_{q \rightarrow +\infty} q^2 f(q) = 0$, a imagem de k_f é $(0, +\infty]$ (ou $[0, +\infty]$, se consideramos $\sup(\emptyset) = 0$ neste contexto) e, caso $\lim_{q \rightarrow +\infty} q^2 f(q) = +\infty$, então a imagem de k_f é $\{+\infty\}$.

3.13. *Dizemos que dois números irracionais α e β são $GL_2(\mathbb{Z})$ -equivalentes se existem inteiros a, b, c, d com $|ad - bc| = 1$ tais que $\beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$.*

Mostre que, se as frações contínuas de α e β são $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ e $\beta = [b_0; b_1, b_2, \dots]$ então α e β são $GL_2(\mathbb{Z})$ -equivalentes se, e somente se, existem $r \in \mathbb{Z}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $b_n = a_{n+r}, \forall n \geq n_0$.

Conclua que $k(\alpha) = k(\beta)$ sempre que α e β são $GL_2(\mathbb{Z})$ -equivalentes.

3.14. *Use o fato de que $C(4) + C(4) = [\sqrt{2} - 1, 4(\sqrt{2} - 1)]$ e a fórmula para $k(\alpha)$ para mostrar que $L \supset [6, +\infty)$.*

