SUPERFICIES RACIONALES SOBRE UN CUERPO

DAMIANO TESTA Y ANTHONY VÁRILLY-ALVARADO

La meta principal de este curso es demostrar un teorema de Iskovskikh–Manin: la clasificación biracional de superficies racionales sobre un cuerpo general. Un amplio número de preguntas de tipo aritmético sobre una variedad X benigna[1] definida sobre un cuerpo k tienen respuestas que dependen sólamente del cuerpo de funciones racionales $k(X)$ asociado a X. Por ejemplo:

(1) ¿Tiene X puntos k-racionales?
(2) ¿Es el conjunto $X(k)$ de puntos racionales sobre X denso en la topología de Zariski?
(3) Si k es un cuerpo global, ¿es el conjunto $X(k)$ de puntos racionales sobre X denso en la topología adélica?

Por ello es importante comprender cuáles variedades algebraicas poseen cuerpos de funciones racionales k-isomorfos. Un buen comienzo es clasificar variedades algebraicas usando la *biracionalidad* como relación de equivalencia: dos variedades X y Y sobre k son biracionales si existen abiertos de Zariski densos $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ k-isomorfos.

Tomando variedades de dimensión superior a uno como punto de partida, nuestro objetivo es clasificar las variedades más sencillas posibles: las que son geométricamente biracionales al plano proyectivo, mejor conocidas como superficies racionales.

La clasificación de superficies racionales sobre los complejos se debe en gran parte a esfuerzos de la escuela italiana de principios de siglo XX. Manin desarrolló la clasificación sobre cuerpos perfectos [Man66], y sus resultados fueron generalizados y simplificados por Iskovskikh [Isk79]. Nuestro punto de vista será uno moderno: desarrollaremos parte de las técnicas de Mori en el contexto de superficies racionales. Las notas de Hassett [Has09] tienen un objectivo similar al nuestro, y vale destacar que los dos instructores aprendimos parte de este material con Hassett. Sin embargo, nuestro énfasis teórico será un poco diferente.

Temas a cubrir

(1) **Introducción y preliminares geométricos**
Divisores y hazes, grupos de Picard y de Néron-Severi, haz canónico, teoría de intersecciones sobre una superficie, Teorema de Riemann-Roch, blow-up, (-1)-curvas.
(2) **Teorema del cono**
Enunciado. Ejemplos: $\mathrm{Bl}_p\,\mathbb{P}^2$ y $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Clasificación de superficies racionales con número de Picard menor o igual a 2.
(3) **Rayos extremales sobre un cuerpo algebraicamente cerrado**
Superficies racionales con número de Picard por los menos 3, conexión con (-1)-curvas.
(4) **Rayos extremales sobre un cuerpo cualquiera**
(-1)-curvas que se intersecan: no son extremales, o son fibraciones en cónicas. Clasificación.

Date: Agosto 2021.

[1] Suave, proyectiva, geométricamente íntegra.

(5) **Classificación biracional de superficies racionales**
Una superficie racional es biracional a una superficie de del Pezzo o a una fibración en cónicas.

Requisitos y notas bibliográficas

Asumiremos una cierta facilidad con el lenguaje moderno de la geometría algebraica, especialmente la teoría de esquemas. Ciertamente los Capítulos I–III de Hartshorne [Har77] son suficientes, aunque un dominio completo de sus detalles no es necesario. Estudiantes sin expocisión previa a la teoría de superficies algebraicas harían bien en leer el capítulo I de [Bea96], y la sección V.1 de [Har77] antes del curso (si bien cubriremos este material, lo tendremos que hacer rápidamente).

El primer capítulo de Matsuki [Mat02] contiene gran parte del material que cubriremos en el curso (¡y mucho más!), pero sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Las notas de Hassett [Has09] y las del segundo autor [VA13] complementan muy bien este capítulo de Matsuki.

Los libros [Deb01, Kol96, Man86] son joyas de alto nivel, con material más avanzado del que cubriremos en el curso. Sin embargo, son referencias súmamente útiles.

References

[Bea96] A. Beauville, *Complex algebraic surfaces*, 2nd ed., London Mathematical Society Student Texts, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. Translated from the 1978 French original by R. Barlow, with assistance from N. I. Shepherd-Barron and M. Reid.

[Deb01] O. Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001.

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Has09] B. Hassett, *Rational surfaces over nonclosed fields*, Arithmetic geometry, Clay Math. Proc., vol. 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 155–209.

[Isk79] V. A. Iskovskih, *Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), no. 1, 19–43, 237 (Russian).

[Kol96] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 32, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Man66] Yu. I. Manin, *Rational surfaces over perfect fields*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **30** (1966), 55–113 (Russian, with English summary).

[Man86] ———, *Cubic forms*, 2nd ed., North-Holland Mathematical Library, vol. 4, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986. Algebra, geometry, arithmetic; Translated from the Russian by M. Hazewinkel.

[Mat02] K. Matsuki, *Introduction to the Mori program*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002.

[VA13] A. Várilly-Alvarado, *Arithmetic of del Pezzo surfaces*, Birational geometry, rational curves, and arithmetic, Simons Symp., Springer, Cham, 2013, pp. 293–319.