Outra técnica muito útil em Combinatória é o **princípio da inclusão-exclusão (PIE)** uma fórmula que permite contar o total de elementos da *união finita* de conjuntos finitos.
Os casos mais simples se referem aos números de elementos da união de dois ou três conjuntos finitos, nos quais o princípio da inclusão-exclusão garante que

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \tag{1}$$

e

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) \\ - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) \\ + n(A \cap B \cap C), \end{aligned} \tag{2}$$

em que $n(X)$ representa o número de elementos do conjunto finito X.
Para verificar (1), basta observar que a soma $n(A)+n(B)$ conta todos os elementos de $A \cup B$, mas os elementos de $A \cap B$ são contados exatamente duas vezes e, por isso, devemos descontar $n(A \cap B)$ uma vez.
Por outro lado, para verificar (2), basta aplicarmos (1) três vezes, obtendo

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n((A \cup B) \cup C) \\ &= n(A \cup B) + n(C) - n((A \cup B) \cap C) \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) \\ &\quad - n((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) \\ &\quad - n(A \cap C) - n(B \cap C) \\ &\quad + n((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Vejamos, em dois exemplos simples, como aplicar o princípio da inclusão-exclusão em Combinatória.

Exemplo 1. Numa classe de 30 alunos, 14 falam inglês, 5 falam alemão e 3 falam inglês e alemão. Quantos alunos falam pelo menos uma língua, dentre inglês e alemão?

Solução. Seja I o conjunto dos alunos que falam inglês e A o conjunto dos alunos que falam alemão. O que queremos descobrir é o total de alunos que falam pelo menos uma das línguas, ou seja, queremos contar o número de elementos do conjunto $I \cup A$. Como $n(I) = 14$, $n(A) = 5$ e $n(I \cap A) = 3$, segue de (1) que

$$n(I \cup A) = 14 + 5 - 3 = 16.$$

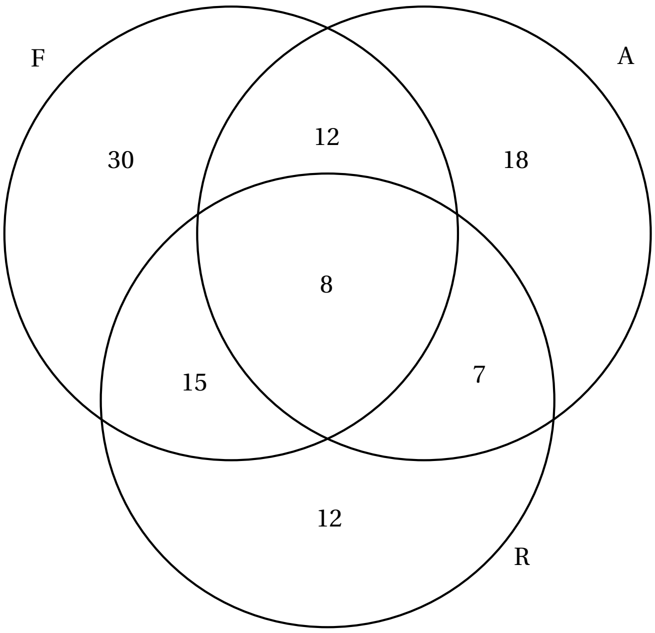
□

Exemplo 2. Em uma faculdade, 65 alunos estudam francês, 45 estudam alemão, 42 estudam russo, 20 estudam francês e alemão, 25 estudam francês e russo, 15 estudam alemão e russo e 8 estudam os 3 idiomas. Encontre o número de alunos de que estudam pelo menos um, dentre tais idiomas,

Solução. Queremos encontrar $n(F \cup A \cup R)$, onde F, A e R denotam os conjuntos de alunos estudando francês, alemão e russo, respectivamente. Pelo princípio da inclusão-exclusão para três conjuntos, temos

$$\begin{aligned} n(F \cup A \cup R) &= n(F) + n(A) + n(R) \\ &\quad - n(F \cap A) - n(F \cap R) - n(A \cap R) \\ &\quad + n(F \cap A \cap R) \\ &= 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + 8 \\ &= 100. \end{aligned}$$

Uma outra maneira de resolver esse problema seria montar o **diagrama de Venn** abaixo.



Observando que $a+b+d+e=n(F)=65$, $b+c+e+f=n(A)=45$, $d+e+f+g=n(R)=42$, $b+e=n(F\cap A)=20$, $d+e=n(F\cap R)=25$, $e+f=n(A\cap R)=15$ e $e=n(F\cap A\cap R)=3$, obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} a+b+d+e=65 \\ b+c+e+f=45 \\ d+e+f+g=42 \\ b+e=20 \\ d+e=25 \\ e+f=15 \\ e=3 \end{cases},$$

o qual pode ser resolvido facilmente e fornece $a=30$, $b=12$, $c=18$, $d=15$, $e=8$, $f=7$ e $g=12$. Logo,

$$\begin{aligned} n(F\cup A\cup R) &= a+b+c+d+e+f+g \\ &= 30+12+18+12+15+7+8 \\ &= 100. \end{aligned}$$

$\square$

De maneira geral, dados n conjuntos finitos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, o número de elementos de sua união é

$$\begin{aligned} n(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n) = &\sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{1\le i<j} n(A_i\cap A_j) \\ &+ \sum_{1\le i<j<k} n(A_i\cap A_j\cap A_k) \\ &- \sum_{1\le i<j<k<p} n(A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_p) \\ &+\ldots \\ &+(-1)^{n-1} n(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n). \quad (3) \end{aligned}$$

Teorema 1. (**Princípio da inclusão e da exclusão**) O número de elementos na união de n conjuntos finitos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é dado por (3).

Demonstração 1. Precisamos mostrar que um elemento que pertença a p, para $p = 1, 2, 3, \ldots, n$, dos conjuntos $A_i's$ é contado por (3) somente uma vez. Pertencendo a p dos conjuntos $A_i's$ ele será contado p vezes em

$$\sum_{i=1}^{n} n(A_i).$$

Em

$$\sum_{1 \le i < j} n(A_i \cap A_j)$$

será contado $\binom{p}{2}$, em

$$\sum_{1 \le i < j < k} n(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$\binom{p}{3}$, e assim sucessivamente até o termo $n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_p)$, que nos dará uma contribuição igual a 1. É claro que a interseção de mais do que p conjuntos não fornecerá nenhuma contribuição, uma vez que o elemento, em questão, pertence a exatamente p dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Somando todas estas contribuições teremos:

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \binom{p}{4} + \ldots + (-1)^p \binom{p}{p} = 1.$$

Teorema 2. Para $n \ge k$, o número de funções sobrejetoras $f : A \to B$, onde $n(A) = n$ e $n(B) = k$, é dado por:

$$T(n,k) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Demonstração 2. Como sabemos, uma função sobrejetora é tal que, para todo elemento $b \in B$, existe pelo menos um elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Como existem k^n funções de A em B, vamos subtrair, deste total, o número de funções que não são sobrejetoras.

Considerando os elementosde B, $b_1, b_2, \ldots, b_k$, definimos:

$$C_i = \text{conjunto de todas as funções } f : A \to B \text{ tais que } f^{-1}(b_i) = \varnothing,$$

ou seja, $f(a) \neq b_i$, para todo $a \in A$. Como uma função deixa de ser sobrejetora quando pertence a pelo menos um dos $C_i's$, para $i = 1, 2, \ldots, k$, o conjunto de todas funções não - sobrejetoras é

$$C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k.$$

Logo, pelo princípio da inclusão e da exclusão,

$$n(C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k) = \sum_{i=1}^{k} n(C_i) - \sum_{1 \le i < j} n(C_i \cap C_j) + \sum_{1 \le i < j < k} n(C_i \cap C_j \cap C_k) - \ldots$$

Como

$$n(C_i) = (k-1)^n, \quad n(C_i \cap C_j) = (k-2)^n, \ldots,$$

temos

$$n(C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k) = \binom{k}{1}(k-1)^n - \binom{k}{2}(k-2)^n + \binom{k}{3}(k-3)^n - \ldots + \binom{k}{k}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Subtraindo este número do total k^n, obtemos

$$k^n - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} (k-i)^n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i} \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

o que conclui a demonstração.

Exercícios propostos

1. Quantos inteiros entre 1 e 3600, inclusive, são divisíveis por 3, 5 ou 7?

2. Quantas são as permutações das letras da palavra BRASIL em que o B ocupa o primeiro lugar, ou o R em segundo lugar, ou o L em sexto lugar?

3. Dentre os inteiros de 1 a 1000000, inclusive, quantos não são quadrados perfeitos, cubos perfeitos e nem quartas potências perfeitas?

4. De quantos modos 6 casais podem sentar-se ao redor de uma mesa circular de tal forma que marido e mulher não fiquem juntos?

5. Determine o número de permutações dos algarismos $1, 2, 3$ e 4 tais que pelo menos um dos elementos aparece na sua posição natural.

6. Determine a quantidade de elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 210\}$ que são relativamente primos com 210.

7. (ITA) Sejam A e B dois conjuntos com 3 e 5 elementos, respectivamente. Quantas funções sobrejetivas $f : B \to A$ existem?

8. Um número telefônico de 7 algarismos $d_1d_2d_3 - d_4d_5d_6d_7$ será chamado de *memorizável* se o prefixo $d_1d_2d_3$ é exatamente igual a $d_4d_5d_6$ ou $d_5d_6d_7$ (possivelmente ambos). Assuma que cada d_i pode ser qualquer um dos dez algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Determine o total de números memorizáveis.

9. Seja $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Sejam D_n o número de permutações caóticas de X e C_n o número de permutações de X com exatamente um ponto fixo. Prove que $|D_n - C_n| = 1$.

Respostas

1. 1955 2. 294 3. 998910 4. $11! - 6(2 \cdot 10!) + 15(4 \cdot 9!) - 20(8 \cdot 8!) + 15(16 \cdot 7!) - 6(32 \cdot 6!) + 1(64 \cdot 5!)$ 5. 15 6. 48 7. 150 8. 19990