



APLICAÇÕES DE MÍNIMOS QUADRADOS

Motivação

Vimos no PAPMEM de janeiro de 2021 como usar o Método dos Mínimos Quadrados para encontrar uma solução aproximada para um sistema linear impossível $Ax = b$, onde A é uma matriz $m \times n$, x é um vetor de \mathbf{R}^n na forma de uma matriz coluna $n \times 1$ e b é um vetor de \mathbf{R}^m na forma de uma matriz $m \times 1$.

Naquela ocasião, deduzimos que a solução aproximada \bar{x} pelo Método dos Mínimos Quadrados é solução do sistema linear $(A^T A)\bar{x} = A^T b$, cujas equações são chamadas de Equações Normais (A^T representa a matriz transposta de A).

Usamos esse Método para encontrar funções de uma classe pré-determinada (por exemplo: linear, quadrática, exponencial) que melhor se ajustasse a um conjunto de pontos dados.

Hoje vamos fazer mais alguns exemplos de aplicação desse Método dos Mínimos Quadrados, mas vamos usar um software livre, o Scilab (www.scilab.org) para nos ajudar nos cálculos, que nas aplicações práticas são realmente muito trabalhosos para serem feitos “à mão”!!

Apresentação do Scilab

Usaremos a última versão estável disponível no site www.scilab.org, que é a versão 6.1.0. Nesse site encontrarão todas as informações necessárias para o download e instalação do software, bem como tutoriais para iniciantes.

Basicamente, o Scilab é uma ferramenta que disponibiliza todas as facilidades para se trabalhar com matrizes. O que vamos precisar para a nossa aula são alguns comandos bem simples tais como as operações de adição e subtração de matrizes, multiplicação de um escalar por uma matriz, multiplicação de matrizes e resolução de sistemas lineares.



Na console do Scilab, digite os seguintes comandos:

`2+3*5 enter`

`((-3)*4+6)/2 enter`

`4^2 enter`

`log(2) enter`

`help log enter`

`exp(log(2)) enter`

Sim, funciona como uma calculadora!

`x = 5 enter`

`y = 3 enter`

`x*y enter`

`a = 3*x+4*y enter`

`b = [1 2 3] enter`

`b = [1;2;3] enter`

`A = [2 4 -1;0 1 3;2 2 -1] enter`

`A' enter`

A' é a transposta da matriz A

`x = [2;1;0] enter`

`b = A*x enter`

Qual a solução x do sistema linear $Ax = b$?

Dados a matriz quadrada A e o vetor b , tais que o sistema $Ax = b$ tem solução única, o comando Scilab para encontrar a solução x do sistema é $A\b$.

Digite $x = A\b$ enter

Exercícios

- 1) A tabela a seguir mostra a expectativa de vida (EV) média dos brasileiros, no nascimento, para alguns anos:

Ano	2011	2013	2015	2017	2019
EV (anos)	74,1	74,9	75,5	76,0	76,6

- a) Encontre, por Mínimos Quadrados, a reta que “melhor se ajuste” a esses dados.
b) De acordo com o modelo obtido no item a) qual a estimativa da EV dos brasileiros, no nascimento, em 2020? E em 2021?
- 2) Em uma reação química, foi medida a evolução da concentração de dióxido $[I_2]$ em vários instantes de tempo, conforme tabela a seguir:

t (s)	0	1,2	3	6	9	12	15	18	24
$[I_2]$ (mmol/L)	20	12	10	5,4	2,8	1,4	0,75	0,4	0,1

Supondo que a concentração de dióxido $[I_2]$ possa ser modelada pela equação $[I_2] = ke^{-\alpha t}$, modele o problema para que possamos encontrar os parâmetros k e α , que melhor ajustem a equação dada aos dados fornecidos, pelo Método dos Mínimos Quadrados. Use o modelo obtido para estimar a concentração de dióxido nos instantes de tempo 20s e 30s.