PROBABILIDADE CONDICIONAL – 28/07/2021

O material dessa aula é parte do Capítulo de Probabilidade do Projeto Livro Aberto de Matemática da OBMEP/IMPA, desenvolvido pela Associação Livro Aberto com o financiamento da Fundação Itaú Social, contando com o apoio das seguintes instituições: UNIRIO, UFF, Pibid/UFF, UFRJ, CP2 e Secretaria de Educação de Mesquita e Angras dos Reis.
Equipe de elaboração do capítulo de Probabilidade: Flávia Landim (IM/UFRJ), Nei Rocha (IM/UFRJ), Alexandre Silva (UNIRIO) e Vanessa Matos Leal (Secretarias de Educação de Mesquita e Angra dos Reis).

I) EXPLORANDO **Probabilidade Condicional**

Atividade 1: uso de óculos e sexo de estudantes

Na tabela a seguir estão os dados de uma turma de segundo ano do Ensino Médio com 40 alunos quanto ao gênero e se ele usa ou não óculos.

gênero	usa óculos	não usa óculos	total
feminino	6	16	22
masculino	5	13	18
total	11	29	40

Se um estudante desta turma é sorteado, pede-se determinar a probabilidade de que ele

(a) use óculos; (b) use óculos, sabendo que é do gênero feminino; (c) use óculos, sabendo que é do gênero masculino;

(d) seja do gênero feminino; (e) seja do gênero feminino, sabendo que usa óculos; (f) seja do gênero feminino, sabendo que não usa óculos,

(g) Analisando os dados da tabela e as respostas obtidas, há razões para supor que gênero é independente de uso de óculos ou não? Por quê?

II) ORGANIZANDO AS IDEIASProbabilidade Condicional

2.1 Definição de probabilidade condicional

Em Ciência, "informação disponível" é certamente uma matéria-prima preciosa, pois através dela é possível construir modelos mais realísticos para descrever fenômenos tanto determinísticos quanto aleatórios e obter resultados mais fidedignos de um ponto de vista da aplicação. Assim, quanto mais informação dispomos sobre determinados fenômenos, mais acurados serão potencialmente nossos modelos. É nesse sentido que surge historicamente o conceito de probabilidade condicional, tema dessa seção.

A ideia central da probabilidade condicional é estabelecer uma estrutura matemática para reavaliar a probabilidade de um evento à luz de uma informação disponível relacionada a este. Por exemplo, um geólogo, ao examinar uma bacia, avaliará a probabilidade de potencial petrolífero de forma diferente a depender de informações disponíveis, tais como porosidade da rocha, estruturas sísmicas, etc. Quanto mais informação ele tenha, tanto mais próxima da realidade será potencialmente sua avaliação da probabilidade de encontrar óleo na região.

O mesmo se dá em avaliações médicas: a partir da anamnese do paciente, um médico melhorará sua avaliação sobre a probabilidade de um paciente ter ou não determinada patologia.

A questão que se coloca é: como incorporar matematicamente a informação de que um evento B ocorreu para se reavaliar a ocorrência de um evento de interesse A?

Definição 1

A probabilidade condicional de o evento A ocorrer, dado que sabemos que o evento B ocorreu, denotada por P(A|B), é definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

Retomando à Atividade 1 (*uso de óculos e sexo de estudantes*), a probabilidade de o aluno sorteado usar óculos, sabendo que ele é do gênero masculino foi calculada pela razão do número de estudantes que usam óculos e são do gênero masculino e o número de estudantes do gênero masculino, a saber, $\frac{5}{18} \approx 0{,}278$. Observe que esse quociente pode ser também obtido a partir da definição de probabilidade condicional, calculando-se o quociente da probabilidade de "usar óculos e ser do gênero masculino” (5/40=0,125) e da probabilidade de ser do gênero masculino (18/40=0,45), obtendo-se $\frac{5/40}{18/40} = \frac{5}{18} \approx 0{,}278$.

Repita essa verificação para as demais probabilidades condicionais calculadas na Atividade 1.

EXEMPLO 1: A probabilidade condicional é uma probabilidade?

É possível verificar que a probabilidade condicional, **dado o conhecimento da ocorrência do evento B**, satisfaz as regras básicas da probabilidade e, portanto, também satisfaz as demais propriedades da probabilidade trabalhadas na primeira aula de probabilidade. As regras básicas (ou axiomas) são dadas por

Regras Básicas (Axiomas):

(1) $P(A) \geq 0, \quad \mathrm{A} \subset S$

(2) $P(S) = 1$

(3) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$, para $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

A primeira regra básica é a de que toda probabilidade é um número não negativo. De fato, tem-se que dado um evento qualquer A⊂S, então

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0,\ P(B) > 0 \text{ e } P(A \cap B) \geq 0.$$

Além disso, a segunda propriedade básica $P(S) = 1$ pode ser adaptada. Observe que dado que o evento B ocorreu, o natural é passar a considerá-lo como o “novo” espaço amostral à luz dessa informação. Assim,

Observe que $P(B|B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$, de modo que vale a segunda regra básica.

Para verificar a terceira regra básica, sejam A_1 e A_2 dois eventos disjuntos, isto é, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Nesse caso, precisamos verificar se

$$P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B).$$

De fato, $P(A_1 \cup A_2|B) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)} = P(A_1|B) + P(A_2|B)$, pois $A_1 \cap B \subset A_1$ e $A_2 \cap B \subset A_2$ são eventos disjuntos.

Portanto, as demais propriedades da probabilidade estudadas, também valem para a probabilidade condicional, a saber, PC1: $P(\emptyset|B) = 0$

PC2*: Se*$A_1 \subset A_2$*, então* $P(A_1|B) \leq P(A_2|B)$

PC3: $P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|B)$

PC4: $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2|B)$

2.2 Regra da Multiplicação

A partir da definição de probabilidade condicional é possível obter uma regra para calcular a probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos A e B. Como $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)})$ (I) , segue que P(A∩B)=P(B)·P(A|B).

Essa expressão é fundamental para compreender algumas resoluções de problemas de cálculo de probabilidades em experimentos sequenciais.

Observe que também poderíamos escrever $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (II) de modo que usando (I) e (II) tem-se a versão simplificada do famoso teorema de Bayes:

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}.$$

EXEMPLO 2:Diagrama de árvore

Em um grupo de 12 pessoas, sabe-se que 8 delas votarão no candidato A e as outras 4 votarão no candidato B. Suponha que duas pessoas serão escolhidas sequencialmente, ao acaso e sem reposição desse grupo. Deseja-se calcular a probabilidade de que as duas pessoas sorteadas votarão em candidatos distintos.

Primeiro vamos apresentar uma solução analítica desse problema, para em seguida mostrar a solução, muito mais simples, usando diagrama de árvore. A solução analítica será útil para compreender melhor os elementos da árvore e quando usar as operações de multiplicação e adição de probabilidades.

Como são apenas dois candidatos, vamos chamar A_1 o evento “a primeira pessoa sorteada votará em A”. Portanto, $\bar{A}_1$ corresponderá ao evento “a primeira pessoa sorteada votará em B“.

Similarmente, seja A_2 o evento “a segunda pessoa sorteada votará em A” de modo que $\bar{A}_2$ corresponderá ao evento “a segunda pessoa sorteada votará em B“.

O evento cuja probabilidade queremos calcular é E: “as duas pessoas sorteadas votarão em candidatos distintos.”

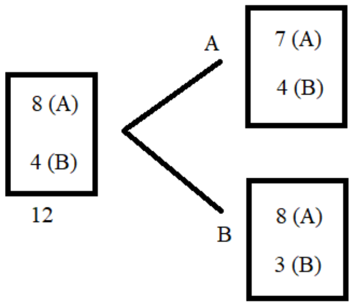
Observe que $E = (A_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2)$ e os dois eventos do lado direito são disjuntos. Portanto, $P(E) = P(A_1 \cap \bar{A}_2) + \mathrm{P}(\bar{A}_1 \cap A_2)$.

Usando a regra da multiplicação, obtém-se

$P(A_1 \cap \bar{A}_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2|A_1) = \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{8}{33}$

$P(\bar{A}_1 \cap A_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} = \frac{8}{33}$

Portanto, P(E)=$\frac{8}{33} + \frac{8}{33} = \frac{16}{33} \approx 0{,}48$.



Solução via diagrama de árvore: Cada ponto (nó) de ramificação da árvore desdobra-se nas possibilidades. Observe que nesse exemplo há apenas duas, de modo que do primeiro nó partem duas possibilidades e a partir de cada novo nó, partirão mais duas possibilidades. Em cada ramificação são assinaladas as respectivas probabilidades, como ilustrado na figura 1.

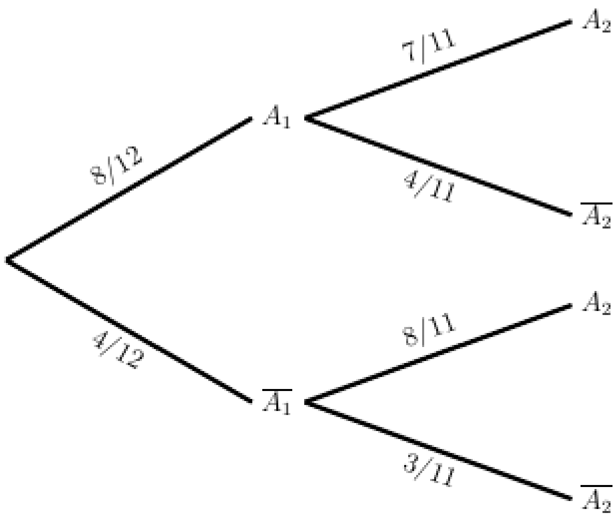


Figura 1: Diagrama de árvore do exemplo com as respectivas probabilidades

Na figura 2, destacam-se as quatro configurações possíveis e respectivas probabilidades.

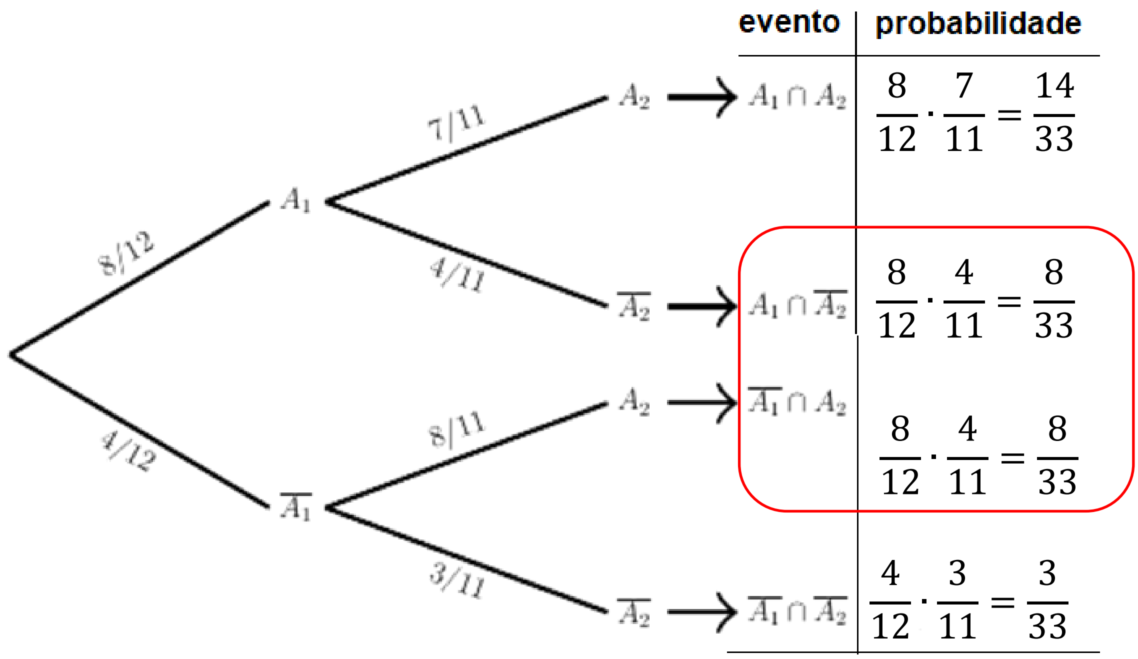


Figura 2: Diagrama de árvore indicando os quatro casos possíveis após o sorteio

$$P(E) = P(A_1 \cap \bar{A}_2) + P(A_1 \cap \bar{A}_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2 | A_1) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2 | \bar{A}_1) = \frac{16}{33} \approx 0{,}48.$$

2.3 Eventos Independentes

Na Atividade *uso de óculos e sexo de estudantes*, concluímos que uso de óculos independe de gênero, pois comparando as probabilidades incondicionais de ser do gênero feminino (0,55) e de ser do gênero masculino (0,45) com as probabilidades condicionais de ser do gênero feminino (0,545) e do gênero masculino (0,455) dado que usa óculos, percebe-se que elas são aproximadamente iguais. Na teoria, para que os eventos sejam independentes, essas probabilidades deveriam ser iguais. Na prática esse tipo de análise é usado em Estatística para avaliar a hipótese de independência entre duas variáveis.

Definição 2

Dois eventos A e B são ditos independentes se a ocorrência de um deles não muda a incerteza sobre a ocorrência do outro.

Em símbolos, A e B são ditos eventos independentes, se P(A|B)=P(A), ou equivalentemente, se P(B|A)=P(B).

Decorre, da definição de probabilidade condicional, que se A e B são eventos independentes, então P(A∩B)=P(A)·P(B).

É preciso ter cuidado ao usar este último resultado. Se não sabemos que os eventos A e B são independentes, então devemos usar a regra da multiplicação, a saber, P(A∩B)=P(B)·P(A|B) que vale para quaisquer dois eventos.

Observe que há uma simetria no conceito de independência de tal modo que se P(A|B)=P(A) , então P(B|A)=P(B). De fato, se P(A|B)=P(A), segue que P(A∩B)=P(A)·P(B) e, assim, P(B|A)=P(B).

EXEMPLO 3: Eventos independentes versus eventos disjuntos

Considere o experimento que consiste em lançar um dado honesto e, em seguida, lançar uma moeda honesta. Defina os eventos A: "ocorre uma face par" e B: "ocorre uma cara". (a) A e B são eventos disjuntos? (b) A e B são eventos independentes?

Observe que estamos lidando com um experimento sequencial de modo que os resultados possíveis envolvem a combinação de dois casos, a saber, número do dado e tipo de face da moeda. Como são seis números possíveis para o dado e duas faces possíveis para a moeda, segue que o espaço amostral desse experimento consiste de 12 pares ordenados:

S={(1,K),(1,C),(2,K),(2,C),(3,K),(3,C),(4,K),(4,C),(5,K),(5,C),(6,K),(6,C)}, em que usamos a letra K para representar cara e a letra C para representar coroa.

Embora, não seja raro encontrar pessoas que afirmam que esses eventos A e B são disjuntos, depois de descrever os elementos do espaço amostral é fácil perceber que A e B **não são** disjuntos. De fato,

A={(2,K),(2,C),(4,K),(4,C),(6,K),(6,C)} tal que $P(A) = \frac{6}{12} = 0{,}5,$
B={(1,C),(2,C),(3,C),(4,C),(5,C),(6,C)} tal que $P(B) = \frac{6}{12} = 0{,}5,$
$A \cap B = \{(2,C),(4,C),(6,C)\}$ tal que $P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$

É natural pensarmos que os lançamentos do dado e da moeda sejam independentes, pois o resultado de um não interfere na probabilidade do resultado de outro.

Portanto, A e B são eventos independentes, mas não são eventos disjuntos.

EXEMPLO4: Eventos disjuntos versus eventos independentes

Sejam A e B dois eventos em um espaço amostral S tais que P(A)>0 e P(B)>0.

(a) Se A e B são eventos disjuntos, então A e B não são eventos independentes.

De fato, se A e B são eventos disjuntos, $P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) > 0$.

(b) Se A e B são eventos independentes, então A e B não são eventos disjuntos.

De fato, se A e B são eventos independentes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) > 0$ de modo que $A \cap B \neq \emptyset$, ou seja A e B não são eventos disjuntos.

Definição 3

Três eventos A, B e C são independentes se, e somente se, eles são dois a dois independentes e P(A∩B∩C)=P(A)·P(B)·P(C).

Dizemos que três eventos A, B e C são dois a dois independentes se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

EXEMPLO 5: Três eventos dois a dois independentes que não são independentes

Considere um dado em forma de tetraedro regular cujos números de suas faces são 1, 2, 3 e 4, como ilustrado na figura 5.

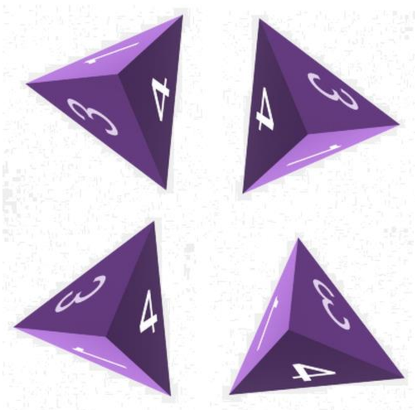


Figura 5: Dado em forma de tetraedro com a face 2 oculta

Defina os eventos A={1,2}, B={1,3} e C={1,4}.

(a) Verifique que A e B são eventos independentes.
(b) Repita o mesmo para os pares de eventos A e C e B e C.
(c) Calcule P(A|B∪C), compare o resultado obtido com P(A) e diga se A e B∪C são eventos independentes.

É fácil perceber que os eventos A, B e C tomados dois a dois são independentes, pois a interseção entre dois dos três é sempre {1} cuja probabilidade é 1/4 e cada um dos eventos A, B e C têm probabilidade 1/2, segue que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ e $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

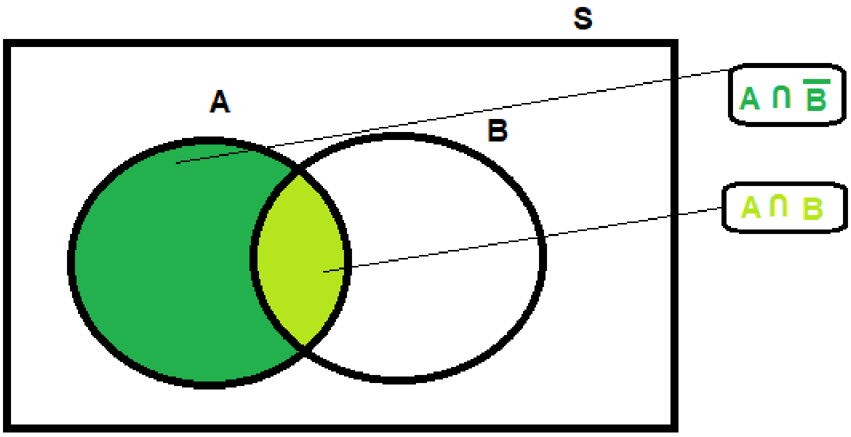
Mas, $P\big(A \cap (B \cup C)\big) = \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(B \cup C)} = \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap C))}{P(B \cup C)} = \frac{1}{3} \neq P(A) = \frac{1}{2}$, e, portanto, A e (B∪C) não são eventos independentes apesar de A e B serem eventos independentes e A e C serem eventos independentes.

Logo, dados três eventos dois a dois independentes, isso não implica que eles sejam independentes.

2.4 Probabilidade total

Dados dois eventos A e B quaisquer, podemos decompor um deles em uma união disjunta da seguinte forma:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$



Logo, podemos escrever

$$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B}).$$

E, assim, a versão simplificada do teorema de Bayes torna-se

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})}.$$

III) PRATICANDO Probabilidade Condicional

1) Desempenho de exames diagnósticos

Testes diagnósticos para detectar uma doença não são infalíveis. Para analisar o desempenho de um desses testes, realizam-se estudos em populações, contendo pessoas sãs e portadoras da doença.

Quatro situações distintas podem ocorrer

(I) a pessoa TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
(II) a pessoa TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

(III) a pessoa NÃO TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.

(IV) a pessoa NÃO TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

Observe que nas situações (II) e (III), o teste falha, pois deveria ser positivo quando a pessoa tem a doença e, negativo, quando a pessoa não tem a doença. Já nas situações (I) e (IV) o teste acerta o diagnóstico.

Dois índices de desempenho para avaliação de um teste diagnóstico costumam ser usados: a sensibilidade e especificidade.

A **sensibilidade** é definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO, dado que a pessoa examinada tem a doença. Já a **especificidade** é a probabilidade de o teste ser NEGATIVO, dado que a pessoa examinada não tem a doença.

O quadro a seguir refere-se a um teste diagnóstico para a doença X, aplicado em uma amostra composta por duzentas pessoas, sendo 100 sadias e 100 portadoras da doença X.

Resultado do teste	doente	sadia
Positivo	95	15
Negativo	5	85

Uma pessoa entre as duzentas dessa amostra será sorteada.

(a) Qual a probabilidade de ela tenha a doença XX?
(b) Qual a probabilidade de que ela NÃO tenha a doença XX?
(c) Se o resultado do teste da pessoa sorteada foi positivo, calcule a probabilidade de que ela tenha a doença.
(d) Se o resultado do teste da pessoa sorteada foi negativo, calcule a probabilidade de que ela tenha a doença.

(e) Sabendo que a pessoa sorteada tem a doença, qual a probabilidade de seu teste ter resultado positivo?
(f) Sabendo que a pessoa sorteada NÃO tem a doença, qual a probabilidade de seu teste ter resultado negativo?
(g) Determine uma estimativa da sensibilidade e da especificidade desse teste, usando a informação do quadro acima.

2) Produção de peças

Para fins de controle de qualidade das peças produzidas em uma fábrica, foram analisadas amostras de peças produzidas por máquinas diferentes. Os resultados obtidos estão resumidos no quadro a seguir.

Máquina	Defeituosas	Boas
I	5	195
II	15	585

Pela informação das amostras coletadas, há razão para se acreditar que a produção de defeituosas ou boas é independente do tipo de máquina utilizada na produção? Por quê?

3) Independência e complementariedade

Sejam A e B dois eventos independentes. Mostre que os pares de eventos a seguir também são independentes:

(a) $\bar{A}$ e B; (b) A e $\bar{B}$; (c) $\bar{A}$ e $\bar{B}$

4) Escolha da chave correta

Retirando-se chaves sequencialmente da caixa, qual a probabilidade de se abrir o cadeado apenas na terceira tentativa se:

(a) a cada tentativa a chave extraída é recolocada na caixa?
(b) a cada tentativa a chave extraída não é recolocada na caixa?
(c) Em qual dos contextos (a) e (b) a probabilidade de se abrir a caixa é maior? Por quê?

5) Probabilidade total

Em um condomínio há três prédios: bloco I, bloco II e bloco III. No bloco I há 180 moradores, no bloco II há 200 moradores e no bloco III há 120 moradores. Entre os moradores do bloco I, há 27 menores de até 12 anos. Entre os moradores do bloco II há 36 menores de até 12 anos. Entre os moradores do bloco III há 24 menores de até 12 anos. Um residente do condomínio será sorteado da seguinte forma: primeiro será sorteado um bloco, tendo os blocos probabilidades iguais. Depois, um residente do bloco sorteado será escolhido ao acaso, usando-se um cadastro dos moradores do bloco. Pede-se calcular a probabilidade

(a) a probabilidade de que a pessoa sorteada seja um menor de até 12 anos;
(b) a probabilidade de ter sido sorteado o bloco II, sabendo que a pessoa sorteada é um menor de até 12 anos.

IV) Considerações finais

As respostas das atividades da seção 3 estão na página do livro aberto (m https://umlivroaberto.org/producoes/ensino-medio) no capítulo de Probabilidade versão html.

Os exercícios no final do capítulo de Probabilidade do Livro Aberto são recomendados.

Bibliografia recomendada:

DEGROOT, Morris H.; SCHERVISH, Mark J. **Probability and statistics**, 2002. Capítulo 2.

MAGALHÃES, Marcos Nascimento. **Probabilidade e variáveis aleatórias**. Edusp, 2006. Capítulo 1.

MORETTIN, Pedro Alberto; BUSSAB, WILTON OLIVEIRA. **Estatística básica**. Saraiva Educação SA, 2017. Capítulo 5.

MORGADO, Augusto César et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1991. Capítulo 3.

MORGADO, Augusto César e Carvalho, P. C. P. **Matemática Discreta.** Coleção PROFMAT, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2015. Capítulo 7.

ROSS, Sheldon. **Probabilidade: um curso moderno com aplicações**. Bookman Editora, 2009. Capítulo 3.