# IMPA

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

*Altemar Brito Lima*


# CAMPOS VETORIAIS SOBRE $\mathbb{P}^n$
# E
# HIPERSUPERFÍCIES INVARIANTES


**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Rio de Janeiro
2011

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

*Altemar Brito Lima*

Orientador:
PhD. Henrique Bursztyn

Co-orientador:
PhD. Israel Vainsencher

# CAMPOS VETORIAIS SOBRE $\mathbb{P}^n$ E HIPERSUPERFÍCIES INVARIANTES

Dissertação apresentada ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Rio de Janeiro
Junho de 2011

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

*Altemar Brito Lima*

# CAMPOS VETORIAIS SOBRE $\mathbb{P}^n$ E HIPERSUPERFÍCIES INVARIANTES

Dissertação apresentada ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada

**PhD. Henrique Bursztyn**
Orientador
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

**PhD. Israel Vainsencher**
Co-orientador
Universidade Federal de Minas Gerais

**PhD. Eduardo de Sequeira Esteves**
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

**PhD. Carolina Bhering de Araujo**
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Rio de Janeiro, 06 de Junho de 2011

# Agradecimentos

Aos meus familiares pela formação da minha personalidade, em especial, minha irmã Audinea.

À minha futura esposa, Cláudia Rosa Almeida de Jesus, pela "paciência" e apoio.

À Fágner e Alessandra, os quais considero parte da minha família, pela força.

À primeira pessoa que me apoiou e incentivou a ingressar na universidade, Raymundo Barboza Vianna.

Aos professores da UESB, em especial, Benedito Acioly, Júlio César dos Reis e Flaulles Boone Bergamaschi, que me incentivaram a ingressar no mestrado.

À todos os meus professores do IMPA pelos ensinamentos. Em especial, ao Gugu, que foi meu professor no meu primeiro verão aqui no IMPA durante o processo de seleção.

Ao meu orientador Henrique Bursztyn pelo apoio e ao meu co-orientador Israel Vainsencher pela sugestão do tema e ensinamentos.

Aos colegas com quem discuti pontos dessa dissertação: Fábio XP, Toninho, Renan, Ruben, Alejandro.

Ao meu professor de Latex, Allan Soares, e os monitores Gaio, Alan Gerardo e Carlos.

À todos da minha turma de mestrado, em especial, Juanito, Cadu, Ricardo, Daniel, Toninho, Alan, Cristiane, Guillermo, Carlos e sua Luz, pela amizade. Valeu, valeu!

Aos parceiros do futebol e do vôlei: Fábio Júlio, Ademir, Guillermo, Júnior, Thiago, Mário, Yuri, Xandão, Xandinho, os Paulinhos, Carlão, Vágner, Miguel, Dudu, Henrique (como reclama!), Gugu (que eu sempre deixava na cara do gol e ainda perdia vários. Como ele pode ter feito quase 4 mil?), Ricardo, Carlos, Ruben, Codá, Sebastian, time Carangueijo, Gaio, Jyrko, Sérgio, Jucelino, Allan R., os Fábios e Maria José (que acertou $\infty^\infty$ mais do que errou). Todos eram, às vezes, "vítimas" do meu "excesso de vontade".

Ao "monitor espiritual" do IMPA, coxinha, que não deixa ninguém desanimar.

Ao Cnpq e aos funcionários do IMPA pelo suporte, em especial, Andréa Nascimento.

A Cláudia Rosa Almeida de Jesus

# Resumo

Estudaremos os campos vetoriais sobre o espaço projetivo de dimensão $n$ sobre o corpo dos complexos e as hipersuperfícies invariantes por tais campos. Mais precisamente, estudaremos as provas de dois dos teoremas apresentados por Esteves em [Est02]. O primeiro, caracteriza os campos vetoriais que deixam uma hipersuperfície suave dada invariante. O segundo, garante que se um campo de vetores não nulo deixa uma hipersuperfície invariante e esta é suave então o grau dessa hipersuperfície é, no máximo, o grau desse campo mais um. Apresentaremos os tópicos de Álgebra Comutativa e Geometria Algébrica necessários para compreensão de tais teoremas. Provaremos que se as derivadas parciais de um polinômio homogêneo pertencente ao anel de polinômios em $n+1$ variáveis sobre o corpo dos complexos se anularem ao mesmo tempo apenas na origem do espaço afim de dimensão $n+1$ sobre o corpo dos complexos então essas derivadas parciais formarão uma sequência regular nesse anel. Veremos que este será o passo fundamental para a prova da primeiro teorema e que o segundo seguirá facilmente do primeiro.

**Palavras chaves:** campo vetorial, hipersuperfície invariante, sequência regular.

# Sumário

# Introdução

Neste trabalho estudaremos as provas de dois dos teoremas provados por Esteves em [Est02] que aparecem na página 6 de seu artigo. São eles:

**Teorema** $E_1$**:** Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície suave de grau $d$. Seja $F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](d)$ tal que $\mathcal{I}(V) = \langle F \rangle$. Então cada campo vetorial $X$ sobre $\mathbb{P}^n$ que deixa $V$ invariante é induzido por um campo da forma

$$\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} P_{i,j}(\partial_j F \partial_i - \partial_i F \partial_j)$$

para certos $P_{i,j} \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ homogêneos de mesmo grau.

**Teorema** $E_2$**:** Seja $X$ um campo vetorial não nulo de grau $m$ sobre $\mathbb{P}^n$. Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície de grau $d$. Se $V$ é suave e invariante por $X$ então $d \leqslant m + 1$.

Como ele mesmo garante, a prova do **Teorema** $E_1$ se baseia nas idéias de O. Zariski que foram publicadas por J. Lipman em [Lip65], parte $c$ do Exemplo 7, página 892.

Um campo vetorial $X$ de grau $m$ sobre $\mathbb{P}^n$ é um campo de retas sobre $\mathbb{P}^n$ induzido por um campo homogêneo $\sum_{i=0}^n G_i \partial_i$ de grau $m$ sobre $\mathbb{C}^{n+1}$. Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Quando $X_{|V}$ define um campo de retas sobre $V$, diremos que $V$ é invariante por $X$. Isso ocorre se e só se $\sum_i G_i \partial_i F \in \mathcal{I}(V)$, $\forall F \in \mathcal{I}(V)$ (Proposição 3.3).

Suponhamos que $V$ uma hipersuperfície suave de grau $d$ invariante pelo campo $X$ acima. Seja $F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](d)$ tal que $\mathcal{I}(V) = \langle F \rangle$. Então $\sum_i G_i \partial_i F = PF$, onde $P \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](m - 1)$.

Dividiremos a prova do **Teorema** $E_1$ em dois casos: $d = 1$ e $d \geqslant 2$. O caso $d = 1$ será bem simples. Para o caso $d \geqslant 2$, utilizaremos vários resultados dos Capítulos 1 e 2. O passo fundamental será provarmos que $(\partial_0 F, ..., \partial_n F)$ é uma sequência $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$-regular (Proposição 3.4).

Veremos que a prova do **Teorema** $E_2$ será consequência imediata do **Teorema** $E_1$.

Nosso objetivo é apresentar a bagagem matemática suficiente para compreensão das provas desses dois teoremas.

Iniciaremos este trabalho com a parte de Álgebra Comutativa: localização, dimensão de anéis, divisores de zero, sequência regular e um pouco de complexo de Koszul.

No capítulo 2, trataremos da parte de Geometria Algébrica: espaço projetivo, variedades projetivas, dimensão, espaço tangente, grau.

No último capítulo, trataremos sobre campos vetoriais sobre o espaço projetivo e variedades invariantes. Na sua última seção, provaremos os dois teoremas.

Em cada capítulo, apresentaremos exemplos voltados para as provas dos **Teoremas** $E_1$ e $E_2$.

Acreditamos que qualquer pessoa com conhecimento de álgebra básica pode ler este trabalho. Mas não apresentaremos as provas de todos os resultados que utilizaremos para demonstrar esses dois teoremas.

Historicamente, o assunto abordado por Esteves foi tratado inicialmente por H. Poincaré em [Poi91b] e [Poi91a] onde ele estuda o seguinte problema:
"É possível decidir se uma equação diferencial algébrica em duas variáveis tem uma integral racional primeira?"

No capítulo 3, abordaremos a seguinte questão: é possível limitarmos o grau das curvas planas $C$ deixadas invariantes por um campo de vetores $X$ sobre $\mathbb{P}^2$? Tal limitante é procurado em termos do único invariante numérico de $X$, seu grau. Veremos que, em geral, a resposta é não. Mas a resposta é sim, quando consideramos apenas curvas suaves. Veremos que a resposta também é não quando consideramos apenas curvas suaves em espaços projetivos de dimensão maior que 2.

Podemos citar vários trabalhos publicados nessa área:
i) Quando $C$ é uma curva plana de grau $d$ invariante por um campo vetorial $X$ de grau $m$, foram obtidas cotas para $d$ em termos de $m$ impondo alguma condição sobre $X$ ou sobre $C$ (consulte [Car94], [CN91] e [CC97]).
ii) Quando uma curva $C \subset \mathbb{P}^n$ é uma interseção completa de hipersuperfícies de graus $d_1, ..., d_{n-1}$ e ela é invariante por um campo $X$ de grau $m$, foram obtidas cotas para $\sum d_i$ em termos de $m$ quando $C$ é suave ou não (consulte [Soa00] e [CCGdlF00]).
iii) M. Soares também mostrou em [Soa97] o **Teorema** $E_2$. Enquanto que M. Brunella e L.G. Mendes mostraram em [BM00] que se $V$ tem no máximo singularidades "normal-crossing" então $deg(V) \leqslant m + n$.

# Capítulo 1

# Um Pouco de Álgebra Comutativa

Neste capítulo apresentaremos as definições e os resultados de Álgebra Comutativa necessários para provarmos os **Teoremas** $E_1$ e $E_2$.

Denotaremos por:

i) $R$ um anel;

ii) $(R, \eta)$ um anel local com ideal maximal $\eta$;

iii) $M$ um $R$-módulo;

iv) $\langle a_1, ..., a_n \rangle R$ (respec. $\langle a_1, ..., a_n \rangle M$), onde cada $a_i \in R$, o ideal de $R$ (respec. $R$-submódulo de $M$) gerado por $a_1, ..., a_n$.

Na Seção 1.1 apresentaremos ao leitor a localização de um domínio $R$ em um seu sistema multiplicativo $S$, que denotaremos por $R_S$, e lembraremos alguns fatos importantes.

Na Seção 1.2 estudaremos a dimensão de um anel.

Na Seção 1.3 apresentaremos os divisores de zero de $M$ e os ideais primos associados a $M$, que denotaremos, respectivamente, por $DZ(M)$ e $Ass(M)$. Veremos como estão relacionados e algumas propriedades.

Na Seção 1.4 apresentaremos as sequências finitas em $R$ que são $M$-regulares. Utilizaremos os resultados da seção anterior para definir a profundidade de $M$ em um ideal $I$ de $R$. Finalizaremos apresentando uma pequena parte do chamado complexo de Koszul associado a um subconjunto finito de $R$.

Visando a prova do **Teorema** $E_1$, analisaremos de perto os casos $M = R$ e $M = R_S$. Mais especificamente, quando $R = \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$ e $S = R \setminus \eta$, onde $\eta = \langle t_1, ..., t_n \rangle R$.

## 1.1 Localização

Um *sistema multiplicativo* $S$ de $R$ é um subconjunto de $R$ tal que:

i) $1 \in S$ e $0 \notin S$;

ii) $x, y \in S \Rightarrow xy \in S$.

Seja $R$ um domínio e seja $S$ um sistema multiplicativo de $R$. Denotemos por $K$ o corpo de frações de $R$. Definimos a *localização de $R$ em $S$* por $R_S := \left\{\frac{r}{s} \in K; r \in R, s \in S\right\}$. Observemos que $R_S$ é um subanel de $K$ que contem $R$. Além disso, é possível verificar que

**Proposição 1.1.** *Nas condições acima, temos que:*

*i) Todos os ideais de $R_S$ são da forma $IR_S := \left\{\frac{r}{s}; r \in I, s \in S\right\}$, onde $I$ é um ideal de $R$. (Daí, se $R$ é noetheriano então $R_S$ também é);*

*ii)*

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{ideais primos } \wp \textit{ de } R \\ \textit{tais que } \wp \cap S = \emptyset \end{array}\right\} \longrightarrow \{\textit{ideais primos de } R_S\}$$
$$\wp \longmapsto \wp R_S = \left\{\frac{r}{s}; r \in \wp, s \in S\right\}$$

*é uma bijeção que preserva a ordem, cuja inversa é dada por*

$$\wp R_S \cap R \longleftarrow \wp R_S$$

*Demonstração.* Consulte [Mat86], página 22. $\square$

**Observação 1.1.** *Quando dissemos que $R_S$ contem $R$ e falamos em $\wp R_S \cap R$, estamos utilizando o seguinte fato: $R$ pode ser identificado com a sua imagem pelo mapa de inclusão $\iota : R \hookrightarrow K$ definido por $\iota(r) = \frac{r}{1}$.*

Um caso interessante é quando tomamos um ideal primo $\wp$ de $R$. Então $S := R \setminus \wp$ é um sistema multiplicativo e denotamos por $R_\wp$ a localização de $R$ em $S$. Além disso, pela Proposição 1.1, $R_\wp$ é um *anel local*, isto é, um anel que tem apenas um ideal maximal, a saber $\wp R_\wp$.

## 1.2 Dimensão de anéis

Denotamos por $Spec(R)$ o conjunto dos ideais primos $\wp$ de $R$.

**Definição 1.1.** *Definimos a dimensão de Krull ou simplesmente a dimensão de $R$ por*

$$dim(R) = sup\{k \in \mathbb{N};\ \textit{existe uma cadeia } \wp_0 \subsetneq ... \subsetneq \wp_k \textit{ com } \wp_i \in Spec(R), \forall i\}.$$

*Definimos a dimensão de um ideal próprio $I$ de $R$ por $dim(I) = dim(R/I)$.*

*Definimos a altura de um ideal $\wp \in Spec(R)$ por*

$$h(\wp) = sup\{k \in \mathbb{N};\ \textit{existe uma cadeia } \wp_0 \subsetneq ... \subsetneq \wp_k = \wp \textit{ com } \wp_i \in Spec(R), \forall i\}.$$

Dizemos que a cadeia $\wp_0 \subsetneq ... \subsetneq \wp_k$ tem comprimento $k$. Além disso, dizemos que ela é maximal quando não existe uma cadeia de ideais primos de $R$ de comprimento maior que $k$ contendo $\wp_i$ para $0 \leqslant i \leqslant k$.

Em particular, para $\wp \in Spec(R)$, temos que

$$dim(\wp) = sup\{k \in \mathbb{N};\ \text{existe uma cadeia } \wp = \wp_0 \subsetneq ... \subsetneq \wp_k \text{ com } \wp_i \in Spec(R), \forall i\}.$$

**Definição 1.2.** *Seja $I \subset R$ um ideal próprio. Dizemos que $\wp \in Spec(R)$ é um divisor primo minimal de $I$ quando $I \subset \wp$ e não existe $\wp' \in Spec(R)$ tal que $I \subset \wp' \subsetneq \wp$.*

Segue diretamente das definições que: se $I$ é um ideal próprio de $R$ então

$$dim(I) = sup\{dim(\wp); \wp \text{ é um divisor primo minimal de } I\}$$

**Exemplo 1.1.** *Seja $R = \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$. Então $dim(R) = n$.*

*Demonstração.* Como $\langle 0 \rangle \subsetneq \langle t_1 \rangle \subsetneq \langle t_1, t_2 \rangle \subsetneq ... \subsetneq \langle t_1, ..., t_n \rangle$, temos que $dim(R) \geqslant n$. Notemos que essa cadeia é maximal. A desigualdade contrária não é verificada facilmente. Ela segue do seguinte resultado mais geral: □

**Proposição 1.2.** *Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado. Seja $A_{\mathbb{K}}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra afim. Se $\mathbb{K}[t_1, ..., t_n] \subset A_{\mathbb{K}}$ é uma normalização noetheriana então $dim(A_{\mathbb{K}}) = n$. Mais ainda, se $A_{\mathbb{K}}$ é um domínio então todas as cadeias de ideais primos maximais de $A_{\mathbb{K}}$ têm comprimento $n$ ( em particular, isto vale para a $A_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}[t_1, ..., t_n]$).*

*Demonstração.* Consulte [Kun85], página 51. □

Segue diretamente da proposição acima que

**Corolário 1.1.** *Seja $\wp \in Spec(\mathbb{C}[t_1, ..., t_n])$. Então $h(\wp) + dim(\wp) = n$.*

**Exemplo 1.2.** *Seja* $þ \in Spec(\mathbb{C}[t_1, ..., t_n])$*. Então* $h(þ) = 1$ *se e só se* $þ$ *é principal.*

*Demonstração.* Isso segue do fato que $\mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$ é um domínio fatorial. $\square$

Vejamos como se comporta a dimensão com relação a localização.

**Proposição 1.3.** *Seja* $R$ *um domínio. Seja* $S$ *um sistema multiplicativo de* $R$*. Seja* $þ \in Spec(R)$ *tal que* $þ \cap S = \emptyset$*. Então*

$$dim\,(R_S/þR_S) \leqslant dim\,(R/þ)\,.$$

*Em particular,* $dim(R_S) \leqslant dim(R)$*.*

*Demonstração.* Lembremos que os ideais primos de $R_S/þR_S$ (respectivamente $R/þ$) estão em correspondência biunívoca com os ideais primos de $R_S$ (respec. $R$) que contêm $þR_S$ (respec. $þ$). Assim, basta mostrarmos que se tivermos uma cadeia de comprimento $n$ formada por ideais primos de $R_S$ que contêm $þR_S$, então teremos uma cadeia de comprimento $n$ formada por ideais primos de $R$ que contêm $þ$. Mas isso é claro, pois uma tal cadeia, pela Proposição 1.1, seria da forma

$$þR_S \subset þ_0R_S \subsetneq ... \subsetneq þ_nR_S,$$

onde

$$þ \subset þ_0 \subsetneq ... \subsetneq þ_n \text{ e } þ_i \in Spec(R), \forall i.$$

$\square$

## 1.3 Divisores de zero de $M$ e primos associados a $M$

Para $m \in M$, definimos o *anulador de* $m$ e o *anulador de* $M$, respectivamente, por $Ann(m) = \{r \in R; rm = 0\}$ e $Ann(M) = \{r \in R; rm = 0, \forall m \in M\}$. Por definição, temos que esses dois conjuntos são ideais de $R$. Definimos também o *conjunto dos ideais primos associados a* $M$ por $Ass(M) = \{þ \in Spec(R);\, þ = Ann(m),\, m \in M\}$.

Tomemos $r \in R$. Dizemos que $r$ é um *divisor de zero de* $M$ quando existe $0 \neq m \in M$ tal que $rm = 0$. Caso contrário, dizemos que $r$ é um *não divisor de zero de* $M$ ou que ele é $M$*-regular*. Denotamos por $DZ(M)$ o *conjunto dos divisores de zero de* $M$.

**Observação 1.2.** *Pelas definições, se* $\varphi : M \to N$ *é um isomorfismo de* $R$*-módulos e* $n = \varphi(m)$ *então* $Ann(n) = Ann(m)$*. Portanto,* $Ass(M) = Ass(N)$*.*

**Lema 1.1.** *Se $þ \in Spec(R)$ então $Ass\,(R/þ) = \{þ\}$. Além disso, se $\overline{0} \neq \overline{m} \in R/þ$ então $Ann(\overline{m}) = þ$.*

*Demonstração.* Podemos escrever $\overline{m} = r + þ$, com $r \notin þ$. É claro que $þ \subset Ann(\overline{m})$. Tomemos $s \in Ann(\overline{m})$. Por definição, $s\overline{m} = \overline{0}$, isto é, $sr \in þ$. Como þ é primo, $s \in þ$. Portanto, $Ann(\overline{m}) = þ$. □

**Lema 1.2.** *Seja $N$ um $R$-submódulo de $M$. Então*

$$Ass(N) \subset Ass(M) \subset Ass(N) \cup Ass(M/N).$$

*Demonstração.* A primeira inclusão segue diretamente da definição. A segunda inclusão é óbvia se $Ass(M) = \emptyset$. Caso contrário, seja $þ \in Ass(M)$. Assim, $þ = Ann(m)$ para algum $0 \neq m \in M$. Daí, $Rm \cong R/þ$ como $R$-módulos. Temos dois casos: $Rm \cap N \supsetneq \langle 0 \rangle$ ou $Rm \cap N = \langle 0 \rangle$. No primeiro caso, $þ \in Ass(N)$ pelo Lema 1.1 e pela Observação 1.2. No segundo caso, vemos que $Rm$ é isomorfo a um $R$-submódulo de $M/N$ via a projeção canônica $\pi : M \to M/N$. Segue, novamente pelo Lema 1.1 e pela Observação 1.2, que $þ \in Ass(M/N)$. □

Até agora não é claro que $Ass(M) \neq \emptyset$. Nesse sentido temos o seguinte resultado.

**Proposição 1.4.** *Se $R$ é noetheriano e $M \neq \langle 0 \rangle$ então $Ass(M) \neq \emptyset$.*

*Demonstração.* Tomemos $C = \{Ann(m); 0 \neq m \in M\}$. Sabemos que $Ann(m) = R$ se e só se $m = 0$. Daí, como $M \neq \langle 0 \rangle$, $C$ é uma família não vazia de ideais próprios de $R$. Como $R$ é noetheriano, $C$ tem um elemento maximal þ. Vamos mostrar que þ é primo. Digamos que $þ = Ann(m')$ e sejam $a, b \in R$ tais que $b \notin þ$ e $ab \in þ$. Assim, $þ \subset Ann(bm') \in C$. Do fato de þ ser maximal, temos que $þ = Ann(bm')$. Como $abm' = 0$, segue que $a \in þ$. □

Observemos que, nas condições da proposição acima, verificamos que cada elemento maximal de $C$ é um ideal primo associado a $M$.

É claro que deve exitir uma relação entre os divisores de zero de $M$ e os ideais primos associados a $M$. De fato temos

**Proposição 1.5.** *Se $R$ é noetheriano então $DZ(M) = \bigcup_{þ \in Ass(M)} þ$.*

*Demonstração.* Se $M = \langle 0 \rangle$, ok. Suponhamos que $M \neq \langle 0 \rangle$. Pelas definições, $DZ(M) \supset \bigcup_{\mathfrak{p} \in Ass(M)} \mathfrak{p}$. Assim, basta mostrarmos que para cada $r \in R$ e $0 \neq m \in M$ tais que $rm = 0$ existe $\mathfrak{p} \in Ass(M)$ tal que $r \in \mathfrak{p}$. De fato, como $Rm \neq \langle 0 \rangle$, pela Proposição 1.4, temos que $Ass(Rm) \neq \emptyset$. Seja $\mathfrak{p} \in Ass(Rm) \subset Ass(M)$. Então $\mathfrak{p} = Ann(r'm)$ e como $rm = 0$, segue que $r \in \mathfrak{p}$. $\square$

Quantos elementos $Ass(M)$ possui? Veremos mais a frente que, sob certas condições, essa quantidade é finita.

**Proposição 1.6.** *Se $R$ é noetheriano e $M$ é finitamente gerado então existe uma cadeia de $R$-submódulos de $M$*

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq ... \supsetneq M_k = \langle 0 \rangle$$

*tal que, para $0 \leqslant i \leqslant k-1$, $M_i/M_{i+1} \cong R/\mathfrak{p}_i$ para algum $\mathfrak{p}_i \in Spec(R)$.*

*Demonstração.* Se $M = \langle 0 \rangle$, ok. Se não, tomemos $C$ a coleção de $R$-submódulos de $M$ para os quais vale a proposição. Como $C \neq \emptyset$ e $M$ é noetheriano, podemos afirmar que $C$ contem um elemento maximal $N$. Mostremos agora que $N = M$. Suponhamos, por absurdo, que $N \neq M$. Então $M/N \neq \langle \overline{0} \rangle$. Pela Proposição 1.4, existe $\mathfrak{p} = Ann(\overline{m}) \in Ass(M/N)$. Daí, $R/\mathfrak{p} \cong R\overline{m}$. Se $\pi : M \to M/N$ é a projeção canônica então $N' := \pi^{-1}(R\overline{m})$ é um $R$-submódulo de $M$ que contem propriamente $N$. Além disso, $N'/N \cong R\overline{m} \cong R/\mathfrak{p}$. Assim, $N \subsetneq N' \in C$. Isso contraria o fato de $N$ ser maximal. Portanto, $M = N$. $\square$

**Lema 1.3.** *Seja $I \subset R$ um ideal tal que $I \subset \mathfrak{p}_1 \cup ... \cup \mathfrak{p}_k$, onde cada $\mathfrak{p}_i \in Spec(R)$. Então $I \subset \mathfrak{p}_i$ para algum $i$.*

*Demonstração.* Façamos indução sobre $k$. Se $k = 1$, ok. Suponhamos que o resultado vale para $k-1$. Observemos que se para algum $i \in \{1, ..., k\}$ tivermos que $I \subset \mathfrak{p}_1 \cup ... \cup \widehat{\mathfrak{p}_i} \cup ... \cup \mathfrak{p}_k$ então bastará aplicarmos a hipótese de indução. Caso contrário, para cada $i \in \{1, ..., k\}$, existe $a_i \in I$ tal que $a_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \left(\mathfrak{p}_1 \cup ... \cup \widehat{\mathfrak{p}_i} \cup ... \cup \mathfrak{p}_k\right)$. Definindo $a = \sum_{i=1}^{k} a_1 ... \widehat{a_i} ... a_n$, temos que $a \in I$, consequentemente, $a \in \mathfrak{p}_i$ para algum $i$. Assim, $a_1 ... \widehat{a_i} ... a_n \in \mathfrak{p}_i$. Como $\mathfrak{p}_i$ é primo, temos que para algum $j \neq i$, $a_j \in \mathfrak{p}_i$. Isso contradiz nossa hipótese sobre o $a_j$. Portanto, $I \subset \mathfrak{p}_1 \cup ... \cup \widehat{\mathfrak{p}_j} \cup ... \cup \mathfrak{p}_k$. Novamente, por hipótese de indução, segue o resultado. $\square$

**Proposição 1.7.** *Se $R$ é noetheriano e $M$ é finitamente gerado então:*
*i) $Ass(M)$ é finito;*
*ii) Se $I \subset R$ é um ideal tal que $I \subset DZ(M)$ então existe $0 \neq m \in M$ tal que $Im = \langle 0 \rangle$.*

*Demonstração.* i)
Pela Proposição 1.6, existe uma cadeia de $R$-submódulos $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq ... \supsetneq M_k = \langle 0 \rangle$ tal que, para $0 \leqslant i \leqslant k-1$, $M_i/M_{i+1} \cong R/\mathfrak{p}_i$ para algum $\mathfrak{p}_i \in Spec(R)$.
Pelo Lema 1.2, $Ass(M_i) \subset Ass(M_{i+1}) \cup Ass(M_i/M_{i+1})$ para $0 \leqslant i \leqslant k-1$.
Assim, $Ass(M) \subset Ass(M_k) \cup Ass(M_{k-1}/M_k) \cup ... \cup Ass(M_i/M_{i+1}) \cup ... \cup Ass(M_0/M_1)$.
Pelo Lema 1.1 e Observação 1.2, $Ass(M_i/M_{i+1}) = \{\mathfrak{p}_i\}$ para $0 \leqslant i \leqslant k-1$. Sabemos que $Ass(M_k) = \emptyset$. Portanto, $Ass(M) \subset \{\mathfrak{p}_0, ..., \mathfrak{p}_{k-1}\}$. □

*Demonstração.* ii)
Pela Proposição 1.5 e pelo item anterior, $I \subset DZ(M) = \mathfrak{p}_1 \cup ... \cup \mathfrak{p}_l$, com $\mathfrak{p}_i \in Ass(M)$ para $1 \leqslant i \leqslant l$. Pelo Lema 1.3, $I \subset \mathfrak{p}_i$ para algum $i$. Daí segue o resultado. □

## 1.4 Sequência regular

**Definição 1.3.** *Dizemos que uma sequência $(a_1, ..., a_n)$ de elementos de $R$ é uma sequência $M$-regular se:*
*i) $\langle a_1, ..., a_n \rangle M \neq M$;*
*ii) Para $i = 1, ..., n$, $a_i$ é um não divisor de zero de $M_i := M/\langle a_1, ..., a_{i-1} \rangle M$. (Obs. $M_1 := M$)*

**Observação 1.3.** *Na definição acima, estamos pensando em $M_i$ como um $R$-módulo. No entanto, $a_i$ é um não divisor de zero de $M_i$ se e só se a classe de $a_i$ em $R_i := R/\langle a_1, ..., a_{i-1} \rangle R$ é um não divisor de zero de $M_i$ pensado agora como $R_i$-módulo.*

Seja $I \subset R$ um ideal. Dizemos que uma sequência $(a_1, ..., a_n)$ de elementos de $R$ é uma sequência em $I$ se $a_i \in I$ para cada $i$.

**Exemplo 1.3.** *Seja $R = \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$. Então $(t_1, ..., t_n)$ é uma sequência $R$-regular, pois:*
*i) $\langle t_1, ..., t_n \rangle R \neq R$;*
*ii) Para $i = 1, ..., n$, $R_i := R/\langle t_1, ..., t_{i-1} \rangle R$ é um domínio e a classe de $t_i$ em $R_i$ é diferente de zero.*

Vamos agora ver alguns resultados que relacionam sequências regulares em um domínio $R$ com sequências regulares em uma localização de $R$.

Nosso primeiro resultado diz que o fato de uma sequência ser regular é preservado pela localização quando impomos uma condição.

**Proposição 1.8.** *Seja $R$ um domínio. Seja $S$ um sistema multiplicativo de $R$. Seja $(a_1, ..., a_n)$ uma sequência $R$-regular. Se $\langle a_1, ..., a_n\rangle R_S \neq R_S$ então $(a_1, ..., a_n)$ é uma sequência $R_S$-regular.*

*Demonstração.* Como $\langle a_1, ..., a_n\rangle R_S \neq R_S$, só temos que mostrar que $a_i$ não é divisor de zero de $R_S/\langle a_1, ..., a_{i-1}\rangle R_S$ para $i = 1, ..., n$. Desde que $R_S$ é um domínio e $a_1 \neq 0$, então $a_1 \notin DZ(R_S)$. Tomemos $i \in \{2, ..., n\}$. Suponhamos que

$$a_i \frac{r_i}{s_i} = a_1 \frac{r_1}{s_1} + ... + a_{i-1} \frac{r_{i-1}}{s_{i-1}}, \tag{1.1}$$

onde cada $\frac{r_j}{s_j} \in R_S$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $s_1 = ... = s_{i-1} = s$. Assim, por (1.1), $a_i r_i s = a_1 r_1 s_i + ... + a_{i-1} r_{i-1} s_i$. Como $a_i \notin DZ(R/\langle a_1, ..., a_{i-1}\rangle R)$, então

$$r_i s = a_1 b_1 + ... + a_{i-1} b_{i-1},$$

com $b_1, ..., b_{i-1} \in R$. Logo $r_i \in \langle a_1, ..., a_{i-1}\rangle R_S$, consequentemente, $\frac{r_i}{s_i} \in \langle a_1, ..., a_{i-1}\rangle R_S$. □

A condição $\langle a_1, ..., a_n\rangle R_S \neq R_S$ é realmente necessária como podemos verificar no seguinte exemplo.

**Exemplo 1.4.** *$S := \{1, 2, 4, 8, ...\}$ é um sistema multiplicativo de $\mathbb{Z}$. Temos que 2 é $\mathbb{Z}$-regular, mas 2 não é $\mathbb{Z}_S$-regular, pois $\langle 2\rangle \mathbb{Z}_S = \mathbb{Z}_S$.*

Surge naturalmente a pegunta: Uma sequência de elementos de $R$ que é $R_S$-regular também é $R$-regular?

Geralmente não. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 1.5.** *$S := \{1, z, z^2, z^3, ...\}$ é um sistema multiplicativo de $R := \mathbb{C}[x, y, z]$. Temos que $(xz, yz)$ é uma sequência $R_S$-regular, mas não é $R$-regular.*

*Demonstração.* Como $yz.x = xz.y$ e $x \notin \langle xz\rangle R$, então $(xz, yz)$ não é $R$-regular.

Temos que $\langle xz, yz\rangle R_S = \langle x, y\rangle R_S$, pois $z$ é um elemento invertível de $R_S$. Como $\langle x, y\rangle R$ é um ideal primo de $R$ disjunto de $S$, pela Proposição 1.1, temos que $\langle x, y\rangle R_S$

é um ideal primo de $R_S$. Em particular, $\langle x,y\rangle R_S \neq R_S$. Pelo Exemplo 1.3, $(x,y)$ é uma sequência $R$-regular. Assim, pela Proposição 1.8, $(x,y)$ é uma sequência $R_S$-regular. Segue que se $yz\frac{a}{b} = xz\frac{c}{d}$, com $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in R_S$, então $\frac{a}{b} \in \langle x\rangle R_S = \langle xz\rangle R_S$. Lembremos que $R_S$ é um domínio e $\langle xz, yz\rangle R_S \neq R_S$. Portanto, $(xz, yz)$ é uma sequência $R_S$-regular. $\square$

Veremos mais a frente um exemplo de um anel $R$ e uma localização $R_S$ tal que cada sequência de elementos de $R$ que é $R_S$-regular também é $R$-regular.

**Definição 1.4.** *Dizemos que um ideal $I$ de $\mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$ é homogêneo se ele puder ser gerado por polinômios homogêneos (não necessariamente de mesmo grau).*

Como $\mathbb{C}$ é um corpo, então $\mathbb{C}$ é um anel noetheriano. Assim, pelo *Teorema da base de Hilbert*(consulte [Kun85], página 10), todos os ideais de $\mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$ são finitamente gerados.

**Lema 1.4.** *Seja $I$ um ideal de $\mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$. Então são equivalentes:*
*i) $I$ é homogêneo.*
*ii) Para cada $F = F_0 + ... + F_d \in I$, com $F_i$ homogêneo de grau $i$ para $0 \leqslant i \leqslant d$, e $d = deg(F)$, temos que $F_i \in I$ para $0 \leqslant i \leqslant d$.*

*Demonstração.* $ii \Rightarrow i$
É claro que $I$ é gerado pelas partes homogêneas de todos os seus elementos. $\square$

*Demonstração.* $i \Rightarrow ii$
Pelo Teorema da base de Hilbert, podemos supor que $I = (G_1, ..., G_r)$, com $G_j$ homogêneo de grau $d_j$ para $1 \leqslant j \leqslant r$. Seja $F = F_0 + ... + F_d \in I$, com $F_i$ homogêneo de grau $i$ para $0 \leqslant i \leqslant d$, e $d = deg(F)$. Temos que

$$F = H_1G_1 + ... + H_rG_r,$$

com $H_j \in \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$ de grau $e_j$ para $1 \leqslant j \leqslant r$. Escrevamos $H_j = \sum_{k=0}^{e_j} H_{j,k}$, com $H_{j,k}$ homogêneo de grau $k$ para $0 \leqslant k \leqslant e_j$ e $1 \leqslant j \leqslant r$. Assim, para $0 \leqslant i \leqslant d$ temos

$$F_i = \widetilde{H_{1,i-d_1}}G_1 + ... + \widetilde{H_{r,i-d_r}}G_r,$$

onde

$$\widetilde{H_{j,i-d_j}} = \begin{cases} H_{j,i-d_j} \text{ se } 0 \leqslant i - d_j \leqslant e_j \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

para $1 \leqslant j \leqslant r$. Portanto, $F_i \in I$ para $0 \leqslant i \leqslant d$. $\square$

**Proposição 1.9.** *Seja* $R = \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$. *Sejam* $F_1, ..., F_m \in R \setminus \mathbb{C}$ *homogêneos. Seja* $\eta = \langle t_1, ..., t_n \rangle R$. *Então:*

*i) Seja* $\wp \in Spec(R)$ *tal que* $F_i \in \wp$ *para cada* $i$. *Se* $(F_1, ..., F_m)$ *é uma sequência* $R$*-regular então ela é* $R_\wp$*-regular.*

*ii) Se* $(F_1, ..., F_m)$ *é uma sequência* $R_\eta$*-regular então ela é* $R$*-regular.*

*Demonstração.* i)

(Observemos que existe pelo menos um ideal primo que contem $F_1, ..., F_m$, a saber $\eta$). Como $F_i \in \wp$ para cada $i$, segue que $\langle F_1, ..., F_m \rangle R_\wp \subset \wp R_\wp \neq R_\wp$. Como $(F_1, ..., F_m)$ é $R$-regular, pela Proposição 1.8, temos que $(F_1, ..., F_m)$ é uma sequência $R_\wp$-regular. □

*Demonstração.* ii)

Como $\langle F_1, ..., F_m \rangle R \subset \eta R \neq R$, só temos que mostrar que $F_i \notin DZ(R/\langle F_1, ..., F_{i-1} \rangle R)$ para $i = 1, ..., m$. Desde que $R$ é um domínio e $F_1 \neq 0$, então $F_1 \notin DZ(R)$. Tomemos $i \in \{2, ..., n\}$. Suponhamos que

$$F_i G_i = F_1 G_1 + ... + F_{i-1} G_{i-1}, \tag{1.2}$$

onde cada $G_j \in R$. Vamos observar que podemos supor que $G_i$ é homogêneo. Escrevamos $G_i = G_{i,0} + ... + G_{i,d}$, com $G_{i,j}$ homogêneo de grau $j$ para $0 \leqslant j \leqslant d$, e $d = deg(G_i)$. Como $F_i$ é homogêneo, então $F_i G_i = F_i G_{i,0} + ... + F_i G_{i,d}$, com $F_i G_{i,j}$ homogêneo de grau $d_i + j$ para $0 \leqslant j \leqslant d$, e $d_i = deg(F_i)$. Desde que $\langle F_1, ..., F_{i-1} \rangle R$ é homogêneo, por (1.2) e pelo Lema 1.4, $F_i G_{i,j} \in \langle F_1, ..., F_{i-1} \rangle R$ para $0 \leqslant j \leqslant d$. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que $G_i$ é homogêneo de grau $d$. Como $(F_1, ..., F_i)$ é $R_\eta$-regular, por (1.2), temos que

$$G_i = F_1 \frac{A_1}{B_1} + ... + F_{i-1} \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}},$$

onde cada $\frac{A_j}{B_j} \in R_\eta$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $B_1 = ... = B_{i-1} = B$. Assim, $G_i B = F_1 A_1 + ... + F_{i-1} A_{i-1}$. Como $B \notin \eta$, então $B = z+$(termos de grau postivo), com $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Assim,

$$G_i B = z G_i + (\text{termos de grau maior que } d) \in \langle F_1, ..., F_{i-1} \rangle R.$$

Novamente, como este ideal é homogêneo, pelo Lema 1.4, segue que $G_i \in \langle F_1, ..., F_{i-1} \rangle R$. □

Empregamos o termo sequência regular ao invés de *conjunto regular* porque a ordem é importante. Podemos verificar isso no seguinte

**Exemplo 1.6.** *Seja* $R = \mathbb{C}[t_1, t_2, t_3]$. *Seja* $M = R/\langle (t_1 - 1)t_3 \rangle R$. *Temos que* $(t_1, (t_1 - 1)t_2)$ *é uma sequência* $M$*-regular, mas* $((t_1 - 1)t_2, t_1)$ *não.*

*Demonstração.* Temos que $\langle t_1, (t_1 - 1)t_2 \rangle M = \langle t_1, t_2 \rangle M \neq M$. Como $(t_1 - 1)t_3$ e $t_1$ são relativamente primos, então $t_1$ é um não divisor de zero de $M$. Observemos que $M/t_1M$ é um domínio, pois é isomorfo a $R/\langle t_1, t_3 \rangle R$. Como $(t_1 - 1)t_2 \notin \langle t_1, t_3 \rangle$, segue que $(t_1 - 1)t_2$ é um não divisor de zero de $M/t_1M$. Portanto, $(t_1, (t_1 - 1)t_2)$ é uma sequência $M$-regular. Notemos agora que $\overline{0} \neq \overline{t_3} \in M$, mas $(t_1 - 1)t_2\overline{t_3} = \overline{0}$. Por definição, $(t_1 - 1)t_2$ é um divisor de zero de $M$. Portanto, $((t_1 - 1)t_2, t_1)$ não é uma sequência $M$-regular. □

No entanto, existem casos em que a ordem dos elementos não é importante. Podemos ver isso no seguinte resultado (nós não o utilizaremos nesse trabalho):

**Proposição 1.10.** *Seja* $(R, \eta)$ *um anel local noetheriano. Seja* $(a_1, ..., a_n)$ *uma sequência* $R$*-regular. Então* $\left(a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)}\right)$ *é novamente uma sequência* $R$*-regular para qualquer permutação* $\sigma$ *de* $\{1, ..., n\}$.

*Demonstração.* Consulte [Eis95], página 426. □

Suponhamos que $R$ é noetheriano, que $M$ é finitamente gerado e que $I$ é um ideal de $R$ tal que $IM \neq M$. Para qualquer sequência $(a_1, ..., a_n)$, $M$-regular, temos, por definição, que

$$\langle a_1 \rangle M \subsetneq \langle a_1, a_2 \rangle M \subsetneq ... \subsetneq \langle a_1, ..., a_n \rangle M \subsetneq M.$$

Como $M$ é noetheriano, segue que qualquer sequência $(a_1, ..., a_n)$ em $I$, que é $M$-regular, pode ser estendida a uma tal sequência *maximal*. Isto é, uma sequência $(a_1, ..., a_k)$ em $I$, com $k \geqslant n$, que é $M$-regular e tal que $I \subseteq DZ(M/\langle a_1, ..., a_k \rangle M)$.

**Exemplo 1.7.** *Se* $R = \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$ *então* $(t_1, ..., t_n)$ *é uma sequência* $R$*-regular maximal em* $I = \langle t_1, ..., t_n \rangle R$ *pelo Exemplo 1.3.*

Surge agora uma pergunta natural: duas sequências $M$-regulares maximais em $I$ têm o mesmo número de elementos? Veremos que, nas condições impostas acima, a resposta é sim. A prova é inspirada em [NR57]. Antes, vamos provar um pequeno lema sobre a troca na ordem de elementos de uma sequência regular que será essencial.

**Lema 1.5.** *Seja* $(a, b)$ *uma sequência* $M$*-regular. Se* $b \notin DZ(M)$ *então* $(b, a)$ *também é uma sequência* $M$*-regular.*

*Demonstração.* Já sabemos, pelas hipóteses, que $\langle a, b\rangle M \neq M$ e que $b \notin DZ(M)$. Então só temos que mostrar que $a \notin DZ(M/\langle b\rangle M)$. Escrevamos $am = bm'$, com $m, m' \in M$. Como $b \notin DZ(M/\langle a\rangle M)$, então $m' = am''$, onde $m'' \in M$. Assim, $am = bam''$. Como $a \notin DZ(M)$, temos $m = bm''$. Portanto, $a \notin DZ(M/\langle b\rangle M)$. □

**Proposição 1.11.** *Seja $R$ um anel noetheriano e seja $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Seja $I$ um ideal de $R$ tal que $IM \neq M$. Então duas sequências $M$-regulares maximais em $I$ têm o mesmo número de elementos.*

*Demonstração.* Suponhamos que a sequência $M$-regular em $I$ mais curta tem $n$ elementos. Façamos indução sobre $n$.

Se $n = 0$ então $I \subseteq DZ(M)$ e não há o que fazer.

Suponhamos que $n > 0$. Sejam $(a_1, ..., a_n)$ uma sequência regular maximal em $I$ e $(b_1, ..., b_n)$ uma sequência regular em $I$. Devemos mostar que $(b_1, ..., b_n)$ é maximal em $I$, isto é, $I \subset DZ(M/\langle b_1, ..., b_n\rangle M)$.

Se $n = 1$ então $I \subset DZ(M/\langle a_1\rangle M)$. Pela Proposição 1.7, existe $m \in M \setminus \langle a_1\rangle M$ tal que $Im \subset \langle a_1\rangle M$. Em particular, $b_1 m = a_1 m'$, onde $m' \in M$. Vamos mostrar que $m' \notin \langle b_1\rangle M$ e que $Im' \subset \langle b_1\rangle M$. Com efeito, se $m'$ pertencesse a $\langle b_1\rangle M$, teríamos que $m \in \langle a_1\rangle M$, pois $b_1 m = a_1 m'$ e $b_1 \notin DZ(M)$. Contradição. Como $Im \subset \langle a_1\rangle M$ e $b_1 m = a_1 m'$, temos $a_1 Im' = b_1 Im \subset \langle a_1 b_1\rangle M$. Como $a_1 \notin DZ(M)$, então $Im' \subset \langle b_1\rangle M$. Logo, $I \subset DZ(M/\langle b_1\rangle M)$.

Suponhamos que $n > 1$. Sejam $M_i := M/\langle a_1, ..., a_{i-1}\rangle M$ e $M_i' := M/\langle b_1, ..., b_{i-1}\rangle M$, onde $1 \leqslant i \leqslant n$. Do fato que $(a_1, ..., a_n)$ e $(b_1, ..., b_n)$ são $M$-regulares e pelas Proposições 1.5 e 1.7 e pelo Lema 1.3, existe $c \in I \setminus \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} (DZ(M_i) \cup DZ(M_i'))$. Assim, $(a_1, ..., a_{n-1}, c)$ e $(b_1, ..., b_{n-1}, c)$ são sequências $M$-regulares em $I$, sendo que a primeira é maximal pela aplicação do caso $n = 1$ ao módulo $M_n$. Pela construção de $c$, podemos aplicar repetidamente o Lema 1.5 para garantir que $(c, a_1, ..., a_{n-1})$ e $(c, b_1, ..., b_{n-1})$ são sequências $M$-regulares em $I$ e, novamente, a primeira é maximal, pois $(a_1, ..., a_{n-1}, c)$ é maximal. Como $(a_1, ..., a_{n-1})$ e $(b_1, ..., b_{n-1})$ são sequências $M/cM$-regulares em $I$ e a primeira é maximal, temos, por hipótese de indução, que a segunda também é maximal. Assim, $(c, b_1, ..., b_{n-1})$ e, consequentemente, $(b_1, ..., b_{n-1}, c)$ são $M$-regulares maximais. Portanto, aplicando o caso $n = 1$ a $M_n'$, temos que $(b_1, ..., b_n)$ é uma sequência $M$-regular maximal em $I$. □

Nas condições da proposição acima, segue a

**Definição 1.5.** *Definimos a profundidade de $M$ em $I$, que denotamos por $d(I, M)$, como o número de elementos de uma sequência $M$-regular maximal em $I$. Em particular, se $(R, \eta)$ é uma anel local, denotamos simplesmente por $d(M)$ o valor $d(\eta, M)$ e o chamamos de profundidade de $M$.*

Segue imediatamente da Proposição 1.11 o

**Corolário 1.2.** *Sejam $R$, $M$, $I$ como na Proposição 1.11. Então para qualquer sequência $(a_1, ..., a_m)$ em $I$, $M$-regular, temos*

$$d(I, M/\langle a_1, ..., a_m \rangle M) = d(I, M) - m.$$

**Exemplo 1.8.** *Seja $R = \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$. Seja $\eta = \langle t_1, ..., t_n \rangle R$. Então $d(\eta, R) = d(R_\eta) = n$.*

*Demonstração.* Pelo Exemplo 1.7 e pela Definição 1.5, temos $d(\eta, R) = n$. Pelo Exemplo 1.3 e pela Proposição 1.8, $(t_1, ..., t_n)$ é uma sequência $R_\eta$-regular em $\eta R_\eta$ que é claramente maximal. Portanto, $d(R_\eta) = n$. □

De fato, era de se esperar que $d(\eta, R) \leqslant d(R_\eta)$, pois

**Corolário 1.3.** *Seja $R$ um domínio noetheriano. Seja $\wp \in Spec(R)$. Se $I$ é um ideal de $R$ contido em $\wp$ então $d(I, R) \leqslant d(IR_\wp, R_\wp)$.*

*Demonstração.* Como $I \subset \wp$, a desigualdade segue diretamente da Proposição 1.8. □

A próxima proposição é essencial para a prova do **Teorema** $E_1$. Ela dará uma cota inferior para a dimensão dos elementos do conjunto $Ass(M)$. Antes de enunciá-la, vejamos um lema algébrico muito conhecido.

**Lema 1.6** (Lema de Nakayama)**.** *Seja $(R, \eta)$ um anel local noetheriano. Seja $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Se $M = \eta M$ então $M = \langle 0 \rangle$.*

*Demonstração.* Tomemos $\{m_1, ..., m_n\}$ um sistema minimal de geradores de $M$. Como $M = \eta M$, temos que $m_n = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i$, onde $a_i \in \eta$ para cada $i$. Daí, $(1 - a_n)m_n = \sum_{i<n} a_i m_i$. Como $1 - a_n \notin \eta$ e este é o único ideal maximal de $R$, então $1 - a_n$ é invertível. Assim, $m_n = (1 - a_n)^{-1} \sum_{i<n} a_i m_i$. Como supomos que o sistema é minimal, devemos ter $n = 1$ e, pela última equação, temos que $m_n = 0$. Portanto, $M = \langle 0 \rangle$. □

**Proposição 1.12.** *Seja $(R, \eta)$ um anel local noetheriano. Seja $M \neq \langle 0 \rangle$ um $R$-módulo finitamente gerado. Então*

$$d(M) \leqslant Min_{\text{þ} \in Ass(M)} \{dim\,(R/\text{þ})\}$$

*Demonstração.* Façamos indução sobre $n := d(M)$.

Se $n = 0$, ok.

Vamos assumir que existe $a \in \eta \setminus DZ(M)$ e que a proposição é válida para módulos com profundidade $n-1$. Pelo Corolário 1.2, $d(M/\langle a \rangle M) = d(M)-1$. Então, por hipótese de indução,

$$d(M) - 1 = d(M/\langle a \rangle M) \leqslant Min_{\text{þ'} \in Ass(M/\langle a \rangle M)} \{dim\,(R/\text{þ'})\}.$$

Assim, basta mostrarmos que

$$Min_{\text{þ'} \in Ass(M/\langle a \rangle M)} \{dim\,(R/\text{þ'})\} < Min_{\text{þ} \in Ass(M)} \{dim\,(R/\text{þ})\}.$$

É suficiente mostrarmos que para cada þ $\in Ass(M)$, existe þ' $\in Ass(M/\langle a \rangle M)$ tal que þ $\subsetneq$ þ', pois assim teremos que $dim\,(R/\text{þ'}) < dim\,(R/\text{þ})$.

Notemos que para quaisquer þ $\in Ass(M)$ e þ' $\in Ass(M/\langle a \rangle M)$ não podemos ter þ $=$ þ', pois $a \notin$ þ e $a \in$ þ'.

Fixemos, a partir de agora, þ $\in Ass(M)$. Vamos tentar encontrar um $R$-submódulo $U \neq \langle \overline{0} \rangle$ de $M/\langle a \rangle M$ tal que þ$U = \langle \overline{0} \rangle$. Se conseguirmos (e iremos), deverá existir þ' $\in Ass(U) \subseteq Ass(M/\langle a \rangle M)$ e consequentemente þ $\subsetneq$ þ'.

O $R$-submódulo $N := \{m \in M; \text{þ}m \subset \langle a \rangle M\}$ de $M$ é diferente de $\langle 0 \rangle$, pois ele contem $N' := \{m \in M; \text{þ}m = \langle 0 \rangle\}$ e þ $\in Ass(M)$. Assim, $N/\langle a \rangle M$ é um $R$-submódulo de $M/\langle a \rangle M$ e þ$\,(N/\langle a \rangle M) = \langle \overline{0} \rangle$. Devemos ter $N/\langle a \rangle M \neq \langle \overline{0} \rangle$. Caso contrário, teríamos $N = \langle a \rangle M$. Em particular, para cada $m' \in N'$, teríamos $m' = am$, com $m \in M$. Como þ$am =$ þ$m' = \langle 0 \rangle$ e $a \notin DZ(M)$, teríamos que þ$m = \langle 0 \rangle$ e assim $m \in N'$. Dessa forma, $N' = \langle a \rangle N'$. Como $a \in \eta$, teríamos, pelo Lema de Nakayama, que $N' = \langle 0 \rangle$. Contradição. Portanto, $N \neq \langle a \rangle M$ e $U := N/\langle a \rangle M$ atende aos nossos desejos. □

Segue imediatamente o

**Corolário 1.4.** *Seja $(R, \eta)$ um anel local noetheriano. Então $d(R) \leqslant dim(R)$.*

Exitem anéis locais noetherianos cuja profundidade é igual a sua dimensão. Estes são chamados de *anéis Cohen-Macauly*. Exemplo: Seja $R = \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$. Seja $\eta = \langle t_1, ..., t_n \rangle R$. Então $(R_\eta, \eta R_\eta)$ é um anel Cohen-Macauly.

Na prova do **Teorema** $E_1$, Esteves utiliza a ida do seguinte teorema (nós não o utilizaremos).

**Teorema 1.1.** *Seja* $(R, \eta)$ *um anel Cohen-Macauly. Sejam* $a_1, ..., a_r \in \eta$. *Então* $\{a_1, ..., a_r\}$ *é parte de um sistema de parâmetros de* $R$ *se e só se* $(a_1, ..., a_r)$ *é uma sequência* $R$*-regular.*

*Demonstração.* Consulte [Mat86], página 135. □

Para mais informações sobre sistema de parâmetros e anéis Cohen-Macauly consulte [Mat86], páginas 104 e 133.

Finalizamos esta seção comentando sobre uma pequena parte do *complexo de Koszul* e apresentando uma proposição que utilizaremos na prova do **Teorema** $E_1$.

Seja $R$ um anel qualquer. Fixemos $a_0, ..., a_n \in R$, onde $n \geqslant 1$. Denotemos por:
i)$R^{n+1}$, o $R$-módulo livre de dimensão $n+1$ com base canônica $\{e_0, ..., e_n\}$;
ii)$\bigwedge^2 R^{n+1}$, o $R$-módulo livre de dimensão $\binom{n+1}{2}$ com base $\{e_i \wedge e_j; 0 \leqslant i < j \leqslant n\}$.

Vamos considerar os seguintes homomorfismos de $R$-módulos:

$$\bigwedge^2 R^{n+1} \xrightarrow{\varphi_n} R^{n+1} \xrightarrow{\psi_n} R, \tag{1.3}$$

onde

$$\varphi_n(e_i \wedge e_j) = a_j e_i - a_i e_j,$$
$$\psi_n(e_i) = a_i.$$

Esta sequência é a parte final do chamado *complexo de Koszul associado a* $\{a_0, ..., a_n\}$. Para mais informações sobre esse complexo, consulte [Mat86], página 127. Na página 128, está provado que:

Se $(a_0, ..., a_n)$ é uma sequência $R$-regular então o complexo de Koszul associado é exato.

Esse resultado foi utilizado por Esteves na prova do **Teorema** $E_1$. Mas, como ele mesmo observou, não é necessário tanto. Vamos agora demonstrar a parte que realmente é necessária.

**Proposição 1.13.** *Seja* $(a_0, ..., a_n)$ *uma sequência* $R$*-regular, onde* $n \geqslant 1$. *Então*

$$\bigwedge^2 R^{n+1} \xrightarrow{\varphi_n} R^{n+1} \xrightarrow{\psi_n} R$$

*é uma sequência exata, isto é,* $Im(\varphi_n) = Ker(\psi_n)$.

*Demonstração.* Primeiro mostremos que $Im(\varphi_n) \subset Ker(\psi_n)$.

Tomemos $w = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} r_{i,j}(e_i \wedge e_j) \in \bigwedge^2 R^{n+1}$, onde cada $r_{i,j} \in R$. Temos que

$$\varphi(w) = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} r_{i,j}\varphi(e_i \wedge e_j) = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} r_{i,j}(a_j e_i - a_i e_j) \text{ e}$$

$$\psi(\varphi(w)) = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} r_{i,j}(a_j\psi(e_i) - a_i\psi(e_j)) = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} r_{i,j}(a_j a_i - a_i a_j) = 0.$$

Daí segue a inclusão. (Na verdade, nós não utilizaremos essa inclusão. A demonstramos aqui apenas por completude e porque é simples).

Agora mostremos que $Ker(\psi_n) \subset Im(\varphi_n)$. Observemos que os $R$-módulos e os mapas acima estão definidos para cada $n \geqslant 1$. Assim, façamos indução sobre $n$. O mais importante é entendermos bem quem é $Im(\varphi_n)$. Por definição,

$$Im(\varphi_n) = \left\{ \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} r_{i,j}(a_j e_i - a_i e_j);\, r_{i,j} \in R \right\}.$$

Observemos que

$$\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} r_{i,j}(a_j e_i - a_i e_j) = (r_{0,1}a_1 + r_{0,2}a_2 + ... + r_{0,n}a_n)e_0 +$$

$$+(-r_{0,1}a_0 + r_{1,2}a_2 + ... + r_{1,n}a_n)e_1 + (-r_{0,2}a_0 - r_{1,2}a_1 + r_{2,3}a_3 + ... + r_{2,n}a_n)e_2 + ...$$

$$... + (-r_{0,k}a_0 - ... - r_{k-1,k}a_{k-1} + r_{k,k+1}a_{k+1} + ... + r_{k,n}a_n)e_k + ...$$

$$... + (-r_{0,n}a_0 - r_{1,n}a_1 - ... - r_{n-1,n}a_{n-1})e_n.$$

Assim,

$$Im(\varphi_n) = \left\{ \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} y_k e_k;\, y_k = \sum_{i=0}^{k-1} -r_{i,k}a_i + \sum_{j=k+1}^{n} r_{k,j}a_j \right\} \tag{1.4}$$

onde cada $r_{i,j} \in R$ e entendemos que

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} -r_{i,k}a_i = 0 \text{ se } k = 0 \\ \sum_{j=k+1}^{n} r_{k,j}a_j = 0 \text{ se } k = n \end{cases}$$

Iniciemos a indução. Quando $n = 1$, temos $Im(\varphi_1) = \{r_{0,1}a_1e_0 - r_{0,1}a_0e_1; r_{0,1} \in R\}$. Tomemos $p_0e_0 + p_1e_1 \in Ker(\psi_1)$. Por definição,

$$p_0a_0 + p_1a_1 = 0 \Rightarrow p_1a_1 = -p_0a_0.$$

Como $a_1 \notin DZ(R/\langle a_0 \rangle R)$, então $p_1 = -r_{0,1}a_0$, onde $r_{0,1} \in R$. Substituindo $p_1$ na equação acima, temos $-r_{0,1}a_0a_1 = -p_0a_0$. Como $a_0 \notin DZ(R)$, segue que $p_0 = r_{0,1}a_1$. Portanto,

$$p_0e_0 + p_1e_1 = r_{0,1}a_1e_0 - r_{0,1}a_0e_1 \in Im(\varphi_1).$$

Suponhamos que o resultado vale para $n-1$, onde $n \geqslant 2$. Tomemos $p_0e_0+...+p_ne_n \in Ker(\psi_n)$. Por definição,

$$p_0a_0 + ... + p_na_n = 0 \Rightarrow p_na_n = -p_0a_0 - ... - p_{n-1}a_{n-1}.$$

Como $a_n \notin DZ(R/\langle a_0, ..., a_{n-1}\rangle R)$, segue que

$$p_n = -r_{0,n}a_0 - ... - r_{n-1,n}a_{n-1} \tag{1.5}$$

onde $r_{i,n} \in R$ para $i = 0, ..., n-1$. Substituindo $p_n$ na equação acima e colocando os $a_i's$ em evidência, temos

$$(p_0 - r_{0,n}a_n)a_0 + ... + (p_{n-1} - r_{n-1,n}a_n)a_{n-1} = 0,$$

isto é,

$$(p_0 - r_{0,n}a_n)e_0 + ... + (p_{n-1} - r_{n-1,n}a_n)e_{n-1} \in Ker(\psi_{n-1}).$$

Por hipótese, $(a_0, ..., a_{n-1})$ é uma sequência $R$-regular. Assim, por hipótese de indução,

$$(p_0 - r_{0,n}a_n)e_0 + ... + (p_{n-1} - r_{n-1,n}a_n)e_{n-1} \in Im(\varphi_{n-1}).$$

Por (1.4), para $0 \leqslant k \leqslant n-1$ temos

$$p_k - r_{k,n}a_n = \sum_{i=0}^{k-1} -r_{i,k}a_i + \sum_{j=k+1}^{n-1} r_{k,j}a_j,$$

isto é,

$$p_k = \sum_{i=0}^{k-1} -r_{i,k}a_i + \sum_{j=k+1}^{n} r_{k,j}a_j$$

onde cada $r_{i,j} \in R$ e

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} -r_{i,k}a_i = 0 \text{ se } k = 0 \\ \sum_{j=k+1}^{n-1} r_{k,j}a_j = 0 \text{ se } k = n-1 \end{cases}$$

Daí segue, pela expressão que encontramos para $p_n$ em (1.5) , que para $0 \leqslant k \leqslant n$ temos

$$p_k = \sum_{i=0}^{k-1} -r_{i,k}a_i + \sum_{j=k+1}^{n} r_{k,j}a_j,$$

onde cada $r_{i,j} \in R$ e

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} -r_{i,k}a_i = 0 \text{ se } k = 0 \\ \sum_{j=k+1}^{n} r_{k,j}a_j = 0 \text{ se } k = n \end{cases}$$

Novamente, por (1.4),

$$p_0e_0 + ... + p_ne_n \in Im(\varphi_n).$$

$\square$

# Capítulo 2

# Um Pouco de Geometria Algébrica

Neste capítulo apresentaremos as definições e os resultados de Geometria Algébrica necessários para provarmos os **Teoremas** $E_1$ e $E_2$.

Denotaremos por:

i) $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n](m)$, onde $m \geqslant 0$, o subconjunto de $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ formado pelos polinômios homogêneos de grau $m$. Assumimos que $0 \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](m)$ para todo $m$;

ii) $\partial_i F$, onde $F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](m)$, o polinômio $\frac{\partial F}{\partial t_i}$;

Na Seção 2.1 definiremos o $n$-ésimo espaço projetivo sobre $\mathbb{C}$, que denotaremos por $\mathbb{P}^n$.

Na Seção 2.2 relacionaremos os ideais homogêneos de $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ com os subconjuntos de $\mathbb{P}^n$. Introduziremos uma topologia em $\mathbb{P}^n$ e definiremos variedades projetivas. Veremos que estas se decompõem em um número finito de subvariedades irredutíveis maximais, chamadas componentes irredutíveis.

Na Seção 2.3 definiremos a dimensão topológica de uma variedade projetiva e a relacionaremos com a dimensão de anéis vista na Seção 1.2.

Na Seção 2.4, dada uma variedade projetiva $V$ e um ponto $v \in V$, definiremos a variedade $T_v V$, chamada de espaço tangente a $V$ em $v$. Relacionaremos a dimensão de $T_v V$ com a dimensão de $V$.

Visando a prova dos **Teoremas** $E_1$ e $E_2$, analisaremos de perto o caso em que a variedade projetiva é uma hipersuperfície.

## 2.1 O espaço projetivo

Tomemos $(p_0, ..., p_n), (q_0, ..., q_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{O\}$. Diremos que $(p_0, ..., p_n)$ e $(q_0, ..., q_n)$ são equivalentes se existe $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $(p_0, ..., p_n) = z(q_0, ..., q_n)$, isto é, se eles estão numa mesma reta em $\mathbb{C}^{n+1}$ que passa pela origem. De fato, isso define uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{O\}$. Segue a

**Definição 2.1.** *Para $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, definimos o n-ésimo espaço projetivo sobre $\mathbb{C}$ por*

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{O\} \diagup \sim .$$

Denotamos por $(p_0 : ... : p_n)$ o ponto (a classe) em $\mathbb{P}^n$ do ponto $(p_0, ..., p_n) \neq O$. Dizemos que $p_0, ..., p_n$ são as *coordenadas homogêneas* do ponto $(p_0 : ... : p_n)$ relativas à base canônica $\{(1, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1)\}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Por definição, as coordenadas homogêneas de um ponto de $\mathbb{P}^n$, relativas à base canônica, só estão bem definidas a menos de um fator escalar não nulo. Além disso, temos que

$$(p_0 : ... : p_n) = (q_0 : ... : q_n) \leftrightarrow \exists z \in \mathbb{C}\backslash\{0\};\ (p_0, ..., p_n) = z(q_0, ..., q_n) \leftrightarrow p_i q_j = p_j q_i,\ \forall i < j$$

Assim, se $p_j \neq 0$ então $q_j \neq 0$ e $\frac{q_i}{q_j} = \frac{p_i}{p_j}$. Isto é, o valor $\frac{p_i}{p_j}$ está bem definido sobre $(p_0 : ... : p_n)$. Por isso usamos a notação " :".

**Observação 2.1.** *Pelas definições acima, segue que os pontos de $\mathbb{P}^n$ estão em correspondência biunívoca com as retas em $\mathbb{C}^{n+1}$ que passam por $O$.*

Tomemos $F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](d)$. Notemos que, para quaisquer $z \in \mathbb{C}$ e $(p_0, ..., p_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, temos $F(zp_0, ..., zp_n) = z^d F(p_0, ..., p_n)$. Assim,

$$F(p_0, ..., p_n) = 0 \Leftrightarrow F(zp_0, ..., zp_n) = 0,\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Isso significa que, apesar de não podermos definir o valor de $F$ num ponto $(p_0 : ... : p_n) \in \mathbb{P}^n$ (pois o valor pode depender das coordenadas homogêneas), podemos perfeitamente dizer se um ponto de $\mathbb{P}^n$ é raiz de $F$ desde que $F$ seja homogêneo. Esse é o pontapé inicial para a próxima seção.

## 2.2 Variedades projetivas

Vimos no capítulo anterior que, pelo *Teorema da base de Hilbert*, todos os ideais de $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ são finitamente gerados e que um ideal $I$ de $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ é dito *homogêneo* se ele puder ser gerado por elementos homogêneos. Para este tipo de ideal faz sentido a

**Definição 2.2.** *Seja $I$ um ideal homogêneo de $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$. Definimos o lugar dos zeros de $I$ em $\mathbb{P}^n$ por*

$$\mathcal{Z}(I) = \{(p_0 : ... : p_n) \in \mathbb{P}^n;\ F(p_0, ..., p_n) = 0,\ \forall F \in I\}.$$

De fato, se $I = \langle F_1, \cdots, F_s \rangle$, onde cada $F_i \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ é homogêneo, então

$$\mathcal{Z}(I) = \{(p_0 : ... : p_n) \in \mathbb{P}^n;\ F(p_0, ..., p_n) = 0,\ \forall i\}.$$

Chamamos esse tipo de subconjunto de $\mathbb{P}^n$ de *conjunto algébrico.*

**Proposição 2.1.** *$\mathbb{P}^n$ é um espaço topológico declarando que os fechados são os conjuntos algébricos. Chamamos essa topologia de Topologia de Zariski.*

*Demonstração.* Notemos que:

i) $\{0\}$ e $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ são ideais homogêneos;

ii) Dados $I_1, ..., I_m$ ideais homogêneos de $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$, temos que o ideal $I_1...I_m$ também é homogêneo;

iii) Dada uma família qualquer $\{I_\lambda / \lambda \in \Lambda\}$ de ideais homogêneos de $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$, temos que o ideal $\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ também é homogêneo.

Mantendo essa notação, é fácil concluirmos que:

i') $\mathcal{Z}(0) = \mathbb{P}^n$ e $\mathcal{Z}(R) = \emptyset$;

ii') $\mathcal{Z}(I_1) \cup ... \cup \mathcal{Z}(I_m) = \mathcal{Z}(I_1...I_m)$;

iii') $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{Z}(I_\lambda) = \mathcal{Z}(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$.

Daí segue o resultado. $\square$

Temos assim uma aplicação sobrejetiva

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \left\{ \text{ ideais homogêneos de } \mathbb{C}[t_0, ..., t_n] \right\} & \longrightarrow & \left\{ \text{ Conjuntos algébricos de } \mathbb{P}^n \right\} \\ I & \longmapsto & \mathcal{Z}(I) \end{array}$$

que, claramente, inverte a ordem.

Por outro lado,

**Definição 2.3.** *Seja $V$ um subconjunto de $\mathbb{P}^n$. Definimos o ideal associado a $V$ por*

$$\mathcal{I}(V) = \langle\{F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n];\ F \text{ é homogêneo e } F(v_0, ..., v_n) = 0,\ \forall (v_0 : ... : v_n) \in V\}\rangle.$$

Por definição, $\mathcal{I}(V)$ é homogêneo.

Assim, temos uma nova aplicação

$$\begin{array}{rcl} \psi : \left\{ \text{ Subconjuntos de } \mathbb{P}^n \right\} & \longrightarrow & \left\{ \text{ ideais homogêneos de } \mathbb{C}[t_0, ..., t_n] \right\} \\ V & \longmapsto & \mathcal{I}(V) \end{array}$$

que, claramente, também inverte a ordem.

Qual a relação entre essas aplicações?

**Definição 2.4.** *Dado um ideal $I$ de $R$, definimos o radical de $I$ por*

$$\sqrt{I} = \{F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n];\ F^m \in I \text{ para algum } m \in \mathbb{N}\}.$$

É fácil verificar que $\sqrt{I}$ é um ideal de $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$. Além disso, Se $I$ é homogêneo então $\sqrt{I}$ também é. É claro que $I \subset \sqrt{I}$. Dizemos que $I$ é um *ideal radical* quando $\sqrt{I} = I$.

**Exemplo 2.1.** *Sejam $F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$. Seja $F = F_1^{k_1} \cdot ... \cdot F_r^{k_r}$ a decomposição de $F$ em fatores irredutíveis não associados. Então $\sqrt{\langle F^m \rangle} = \langle F_1 ... F_r \rangle$, $\forall m \in \mathbb{N}_{>0}$. (Obs. se $F$ é homogêneo então cada $F_i$ é homogêneo). É claro que todo ideal primo de $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ é radical.*

Observemos que:

i) $\varphi$ não pode ser injetivo, pois, para qualquer ideal $I$ de $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$, temos que $\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}\left(\sqrt{I}\right)$, mas nem sempre temos $I = \sqrt{I}$.

ii) $\psi$ não pode ser sobrejetivo, pois, para qualquer subconjunto $V$ de $\mathbb{P}^n$, temos que $\mathcal{I}(V)$ é um ideal radical.

De fato, temos

**Teorema 2.1** (Teorema dos zeros projetivo de Hilbert=TZH)**.**

$$\begin{array}{rcl} \left\{ \textit{ Conjuntos algébricos de } \mathbb{P}^n \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \textit{ideais homogêneos e radicais de} \\ \mathbb{C}[t_0, ..., t_n], \textit{ exceto } \langle t_0, ..., t_n \rangle \end{array} \right\} \\ V & \longmapsto & \mathcal{I}(V) \end{array}$$

*é uma bijeção, cuja inversa é dada por*

$$\mathcal{Z}(I) \longleftarrow I$$

*Demonstração.* Consulte [Mum99], página 8. □

Este resultado nos fornece uma importante relação entre a Geometria e a Álgebra.

Observemos que o ideal $\langle t_0, ..., t_n \rangle$ teve que ser eliminado acima porque $Z(t_0, ..., t_n) = \emptyset$. Assim, $I(Z(t_0, ..., t_n)) = \mathbb{C}[t_0, ..., t_n] \neq \langle t_0, ..., t_n \rangle$. Além disso, pelo teorema e do fato que $\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(\sqrt{I})$, para qualquer ideal homogêneo $I$ de $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$, temos que $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \sqrt{I}$.

A partir de agora chamamos os fechados de $\mathbb{P}^n$ de *variedades projetivas* ou simplesmente *variedades*.

**Definição 2.5.** *Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade. Se $\mathcal{I}(V) = \langle F \rangle$ com $F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](d) \backslash \{0\}$, $d > 0$, então dizemos que $V$ é uma hipersuperfície de grau $d$. Em particular, quando $d = 1$, dizemos que $V$ é um hiperplano.*

Observemos que o grau de $V$ está bem definido, pois se $\mathcal{I}(V) = \langle F \rangle = \langle G \rangle$ então $G = zF$, com $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Seja $F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n] \setminus \mathbb{C}$ homogêneo. Seja $F = F_1^{k_1} \cdot ... \cdot F_r^{k_r}$ uma decomposição de $F$ em fatores irredutíveis não associados. Então, pelo Exemplo 2.1 e pelo $TZH$, $V = \mathcal{Z}(F)$ é uma hipersuperfície e $deg(V) = deg(F_1) + ... + deg(F_r)$.

Observemos que a variedade projetiva $\mathcal{Z}(t_0 t_1) \subset \mathbb{P}^2$ pode ser escrita como a união de duas subvariedades próprias: $\mathcal{Z}(t_0)$ e $\mathcal{Z}(t_1)$. Mas não podemos fazer o mesmo com essas duas variedades.

**Definição 2.6.** *Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Dizemos que $V$ é redutível se ela é união própria de duas subvariedades projetivas; irredutível caso contrário.*

**Exemplo 2.2.** *Seja $V = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^n$. Então $V$ é irredutível se e só se $F$ é irredutível.*

**Proposição 2.2.** *Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Então:*
*i) $V$ é uma união finita de subvariedades projetivas;*
*ii) Suponhamos que $V = V_1 \cup ... \cup V_r$, onde cada $V_i$ é uma subvariedade irredutível e $V_i \nsubseteq V_j$ para $i \neq j$. Então $\{V_1, ..., V_r\}$ é único. Chamamos essas subvariedades de $V$ de componentes irredutíves de $V$.*

*Demonstração.* i)
Façamos "indução noetheriana".

Se $V$ é irredutível, acabou. Se não, $V = V_1 \cup V_2$, com $V_1, V_2$ subvariedades próprias. Se $V_1$ e $V_2$ são irredutíveis, acabou. Se não, pelo menos uma delas é união de duas subvariedades próprias, digamos: $V_1 = V_{11} \cup V_{12}$ ou $V_2 = V_{21} \cup V_{22}$. O processo segue com a análise dessas novas subvariedades.

Para concluir o que queremos temos que verificar que esse processo para, isto é, que em algum momento chegamos em subvariedades irredutíveis.

Suponha por absurdo que o processo não para. Então teremos uma sequência decrescente não estacionária, digamos,

$$V \supsetneq V_1 \supsetneq V_{11} \supsetneq ... \supsetneq V_{(m)} \supsetneq ...$$

de variedades projetivas. Assim, pelo $TZH$, teremos uma sequência crescente não estacionária

$$\mathcal{I}(V) \subsetneq \mathcal{I}(V_1) \subsetneq \mathcal{I}(V_{11}) \subsetneq ... \subsetneq \mathcal{I}\left(V_{(m)}\right) \subsetneq ...$$

de ideais de $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$. Mas $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ é noetheriano pelo teorema da base de Hilbert. Contradição. $\square$

*Demonstração.* ii)
Suponhamos que

$$V = V_1 \cup ... \cup V_r = W_1 \cup ... \cup W_s,$$

onde cada $V_i, W_i$ é uma subvariedade irredutível e $V_i \not\subseteq V_j$, $W_i \not\subseteq W_j$ para $i \neq j$. Fixemos $i \in \{1, ..., r\}$. Temos que

$$V_i = (V_i \cap W_1) \cup ... \cup (V_i \cap W_s).$$

Como $V_i$ é irredutível, segue que $V_i \subset W_k$ para algum $k$. Analogamente, temos que $W_k \subset V_j$ para algum $j$. Como $V_i \not\subseteq V_j$ para $i \neq j$ e $V_i \subset W_k \subset V_j$, segue que $j = i$, isto é, $W_k = V_i$. Esse é o passo fundamental. O resultado segue por indução. $\square$

Observemos que, na prova do item (ii), verificamos que: se $W$ é qualquer subvariedade irredutível de $V$ então $W$ está contido em alguma componente irredutível de $V$. Também verificamos que: se $W$ é uma subvariedade irredutível de $V$ que contem uma componente irredutível $V_i$ de $V$ então $W = V_i$.

Vamos ver o conceito de irredutibilidade do ponto de vista algébrico.

**Proposição 2.3.** *Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva não vazia. Então $V$ é irredutível se e só se $\mathcal{I}(V)$ é primo.*

*Demonstração.* Suponhamos que $V$ é irredutível. Sejam $F, G \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ tais que $G \notin \mathcal{I}(V)$ e $FG \in \mathcal{I}(V)$. Mostremos que $F \in \mathcal{I}(V)$. Escrevamos

$$F = F_0 + ... + F_d, G = G_0 + ... + G_e$$

onde $F_i, G_j \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ são homogêneos de graus $i$, $j$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $G_e \notin \mathcal{I}(V)$ (caso contrário, trocamos $G$ por $\tilde{G} = G_0 + ... + G_{\tilde{e}}$, onde $G_{\tilde{e}}$ é a parte homogênea de $G$ de mais alto grau que não pertence a $\mathcal{I}(V)$). Lembremos que $\mathcal{I}(V)$ é homogêneo, assim, pelo Lema 1.4, $\mathcal{I}(V)$ contem um polinômio se e só se contem todas as partes homogêneas desse polinômio. Como $F_dG_e$ é o termo de mais alto grau de $FG$, então $F_dG_e \in \mathcal{I}(V)$. Pelo $TZH$, $\mathcal{Z}(F_d) \cup \mathcal{Z}(G_e) = \mathcal{Z}(F_dG_e) \supset \mathcal{Z}(\mathcal{I}(V)) = V$. Como $V$ é irredutível, segue que $\mathcal{Z}(F_d) \supset V$ ou $\mathcal{Z}(G_e) \supset V$, isto é, $F_d \in \mathcal{I}(V)$ ou $G_e \in \mathcal{I}(V)$. Como $G_e \notin \mathcal{I}(V)$, segue que $F_d \in \mathcal{I}(V)$. Subtraindo $F_d$ de $F$ e repetindo o argumento, teremos que cada componente homogênea de $F$ pertence a $\mathcal{I}(V)$.

Agora suponhamos que $\mathcal{I}(V)$ é primo. Suponhamos por absurdo que $V = V_1 \cup V_2$, com $V_1, V_2$ subvariedades próprias de $V$. Assim, $\mathcal{I}(V_1) \supsetneq \mathcal{I}(V)$ e $\mathcal{I}(V_2) \supsetneq \mathcal{I}(V)$. Tomemos $F_1 \in \mathcal{I}(V_1) \setminus \mathcal{I}(V)$ e $F_2 \in \mathcal{I}(V_2) \setminus \mathcal{I}(V)$. Temos que $F_1F_2 \in \mathcal{I}(V_1 \cup V_2) = \mathcal{I}(V)$. Assim, $\mathcal{I}(V)$ não é primo. Contradição. $\square$

**Exemplo 2.3.** *Temos que:*
*i) $\mathbb{P}^n$ é irredutível, pois $\mathcal{I}(\mathbb{P}^n) = \langle 0 \rangle$;*
*ii) Seja $F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n] \setminus \mathbb{C}$ é homogêneo. Seja $F = F_1^{k_1} \cdot ... \cdot F_r^{k_r}$ uma decomposição de $F$ em fatores irredutíveis não associados. Seja $V = \mathcal{Z}(F)$. Então $\mathcal{Z}(F_1), ..., \mathcal{Z}(F_r)$ são as componentes irredutíveis de $V$. Ou seja, as componentes irredutíveis de uma hipersuperfície são hipersuperfícies.*

Na página 5, vimos a definição de divisor primo minimal de um ideal. No caso de ideais homogêneos, temos que

**Proposição 2.4.** *Seja $I \subset \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ um ideal próprio homogêneo. Então todos os divisores primos minimais de $I$ são homogêneos.*

Sua prova segue diretamente do

**Lema 2.1.** *Seja $\text{þ} \in Spec(\mathbb{C}[t_0, ..., t_n])$. Seja $\text{þ}_h$ o ideal de $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ gerado pelos elementos homogêneos de þ. Então $\text{þ}_h$ é primo.*

*Demonstração.* Sejam $F, G \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ tais que $G \notin \text{þ}_h$ e $FG \in \text{þ}_h$. Mostremos que $F \in \text{þ}_h$. Escrevamos

$$F = F_0 + ... + F_d, G = G_0 + ... + G_e$$

onde $F_i, G_j \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ são homogêneos de graus $i$, $j$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $G_e \notin \text{þ}_h$. Como $F_dG_e$ é o termo de mais alto grau de $FG$ e $\text{þ}_h$ é homogêneo, então $F_dG_e \in \text{þ}_h \subset \text{þ}$. $G_e \notin \text{þ}$, pois $G_e \notin \text{þ}_h$. Assim, $F_d \in \text{þ}$, consequentemente, $F_d \in \text{þ}_h$. Subtraindo $F_d$ de $F$ e repetindo o argumento, teremos que cada componente homogênea de $F$ pertence a $\text{þ}_h$. □

Necessariamente, se þ é um divisor primo minimal de um ideal homogêneo $I$, temos que $I \subset \text{þ}_h \subset \text{þ}$. Por definição e pelo lema acima, segue que $\text{þ}_h = \text{þ}$.

Na prova do **Teorema** $E_1$ utilizaremos o seguinte resultado:

**Proposição 2.5.** *Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade não vazia. Então as componentes irredutíveis de $V$ estão em correspondência biunívoca com os divisores primos minimais de $\mathcal{I}(V)$.*

*Demonstração.* Notemos que, pela última proposição, os divisores primos minimais de $\mathcal{I}(V)$ são homogêneos. Lembremos também que todo ideal primo é radical. Sejam $V_1, ..., V_r$ as componentes irredutíveis de $V$. Pelo $TZH$, devemos mostrar que:

i) $\mathcal{I}(V_i)$ é um divisor primo minimal de $\mathcal{I}(V)$ para $1 \leqslant i \leqslant r$;

ii) Se þ é um divisor primo minimal de $\mathcal{I}(V)$ então $\text{þ} = \mathcal{I}(V_i)$ para algum $i$.

Fixemos $i \in \{1, ..., r\}$. Pela Proposição 2.3 e do fato que $V \supset V_i$, temos que $\mathcal{I}(V) \subset \mathcal{I}(V_i) \in Spec(\mathbb{C}[t_0, ..., t_n])$. Tomemos þ' um divisor primo minimal de $\mathcal{I}(V)$ tal que þ' $\subset \mathcal{I}(V_i)$. Pelo $TZH$, $V \supset \mathcal{Z}(\text{þ'}) \supset V_i$. Pela Proposição 2.3, $\mathcal{Z}(\text{þ'})$ é irredutível. Então $\mathcal{Z}(\text{þ'}) = V_i$. Pelo $TZH$, þ' $= \mathcal{I}(\mathcal{Z}(\text{þ'})) = \mathcal{I}(V_i)$.

Agora tomemos þ um divisor primo minimal de $\mathcal{I}(V)$. Como feito acima para þ', podemos afirmar que $\mathcal{Z}(\text{þ}) \subset V_j$ para algum $j$. Assim, $\text{þ} = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(\text{þ})) \supset \mathcal{I}(V_j) \supset \mathcal{I}(V)$ pelo $TZH$. Pela minimalidade, $\text{þ} = \mathcal{I}(V_j)$. □

## 2.3 Dimensão das variedades projetivas

Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade não vazia. Consideremos $V$ um espaço topológico com a topologia induzida por $\mathbb{P}^n$. Como $V$ é um fechado, então os fechados em $V$ são os fechados de $\mathbb{P}^n$ que estão contidos em $V$.

**Definição 2.7.** *Definimos a dimensão de Krull ou simplesmente a dimensão de $V$ por*

$$dim(V) = sup\{k \in \mathbb{N};\ existe\ \emptyset \subsetneq V_0 \subsetneq ... \subsetneq V_k,\ com\ V_i\ fechado\ irredutível\ de\ V,\ \forall i\}.$$

*Definimos a codimensão de $V$ por*

$$codim(V) = sup\{k \in \mathbb{N};\ existe\ V = V_0 \subsetneq ... \subsetneq V_k = \mathbb{P}^n,\ com\ V_i\ fechado\ irredutível,\ \forall i\}.$$

*Dizemos que $V$ é uma curva quando $dim(V) = 1$.*

Convencionamos $dim(\emptyset) = -1$.

Por definição, se $V = V_1 \cup ... \cup V_k$ é a decomposição de $V$ em componentes irredutíveis então $dim(V) = max_i\{dim(V_i)\}$. Além disso, desde que $\mathbb{P}^n$ é um espaço topológico noetheriano (isto é, não contem cadeias descendentes infinitas de fechados), temos que $dim(V)$ é finita para toda variedade $V \subset \mathbb{P}^n$.

Essa definição de dimensão é puramente topológica. Vejamos qual a relação entre $dim(V)$ e $dim(\mathcal{I}(V))$. (Este último foi definido na página 5).

**Proposição 2.6.** *Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade não vazia. Então $dim(V) = dim(\mathcal{I}(V))-1$.*

*Demonstração.* Suponhamos por enquanto que $V$ é irredutível. Seja $d = dim(V)$. Tomemos uma cadeia

$$\emptyset \subsetneq V_0 \subsetneq ... \subsetneq V_d = V$$

de fechados irredutívies de $V$. Pelo $TZH$ e pela Proposição 2.3, temos que

$$\mathcal{I}(V) = \mathcal{I}(V_d) \subsetneq ... \subsetneq \mathcal{I}(V_0) \subsetneq \langle t_0, ..., t_n \rangle$$

é uma cadeia de primos. Assim, $dim(\mathcal{I}(V)) \geqslant d+1$. Não é possível inserir um ideal primo diferente nessa cadeia, pois, caso contrário, poderíamos estender a primeira cadeia, o que é impossível. Como o ideal $\langle t_0, ..., t_n \rangle$ é maximal, podemos concluir, pela Proposição 1.2, que $dim(\mathcal{I}(V)) = d + 1$.

No caso em que $V = V_1 \cup ... \cup V_r$ é a decomposição de $V$ em componentes irredutíveis, temos que $dim(V) = max_i\{dim(V_i)\} = max_i\{dim(\mathcal{I}(V_i))-1\} = max_i\{dim(\mathcal{I}(V_i))\}-1 = dim(\mathcal{I}(V)) - 1$, onde a última igualdade decorre da Proposição 2.5. $\square$

**Corolário 2.1.** *Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade irredutível não vazia. Seja $d = dim(V)$. Então a cadeia $\emptyset \subsetneq V_0 \subsetneq ... \subsetneq V_k = V$ formada por fechados irredutíveis de $V$ é maximal (isto é, não existe uma cadeia de fechados irredutíveis não vazios de $V$ de comprimento maior que $k$ que contenha $V_i$ para cada $i$) se e só se $k = d$.*

*Demonstração.* Segue das Proposições 1.2 e 2.6. □

**Definição 2.8.** *Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade não vazia. Dizemos que $V$ tem dimensão pura $d$ se todas as suas componentes irredutíveis têm dimensão $d$.*

**Exemplo 2.4.** *Temos que:*
*i) $dim(\mathbb{P}^n) = n$. (Isso decorre do Exemplo 1.1);*
*ii) Seja $V \subset \mathbb{P}^n$. Então $V$ é uma hipersuperfície se e só se $V$ tem dimensão pura $n-1$. (Isso decorre dos Exemplos 1.1, 1.2 e 2.3 e do Corolário 1.1);*
*iii) Em $\mathbb{P}^2$, hipersuperfícies e curvas de dimensão pura $1$ são a mesma coisa. (Isso decorre das definições e do item (ii));*
*iv) Seja $V \subset \mathbb{P}^n$. Então $dim(V) = 0$ se e só se $V$ consiste de um número finito de pontos. (Porque um ponto de $\mathbb{P}^n$ é uma variedade irredutível de dimensão $0$ e toda variedade tem um número finito de componentes irredutíveis).*

Uma pergunta importantíssima em Geometria Algébrica é: o que podemos afirmar sobre a dimensão da interseção entre duas variedades projetivas?

Vejamos agora alguns resultados sobre isso. O primeiro é derivado do teorema do ideal principal de Krull (consulte [Kun85], página 132).

**Proposição 2.7.** *Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade irredutível de dimensão $d$. Seja $H \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície. Se $V \cap H \neq \emptyset$ e $V \nsubseteq H$, então cada componente irredutível de $V \cap H$ têm dimensão $d-1$.*

*Demonstração.* Consulte a página 132 de [Kun85], proposição 3.2. □

**Proposição 2.8.** *Sejam $V, W \subset \mathbb{P}^n$ variedades quaisquer com $dim(V) + dim(W) \geqslant n$. Então $V \cap W \neq \emptyset$.*

*Demonstração.* Consulte [Kun85], página 134. □

**Corolário 2.2.** *Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade com dimensão $d \geqslant 1$. Seja $H \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície. Sejam $F_0, ..., F_n \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n] \setminus \mathbb{C}$ homogêneos. Então, combinando as* *duas proposições acima, temos que:*

*i) Suponha que $V$ é irredutível. Então $V \cap H$ têm dimensão pura $d-1$ se e só se $V \nsubseteq H$;*

*ii) $dim(V \cap H) = d-1$ se e só se $H$ não contem qualquer componente irredutível de $V$ de dimensão $d$;*

*iii) Para $0 \leqslant i \leqslant n$, cada componente irredutível de $\mathcal{Z}(F_0, ..., F_i)$ têm dimensão pelo menos $n-i-1$. Em particular, $\mathcal{Z}(F_0, ..., F_{n-1}) \neq \emptyset$;*

*iv) Para $0 \leqslant i \leqslant n$, se $\mathcal{Z}(F_0, ..., F_i)$ tem dimensão pura $n-i-1$ então $\mathcal{Z}(F_0, ..., F_{i-1})$ tem dimensão pura $n-i$. (Obs. Se $i=0$, convencionamos $\mathcal{Z}(F_0, ..., F_{i-1}) = \mathbb{P}^n$). Em particular, se $\mathcal{Z}(F_0, ..., F_n) = \emptyset$ então $\mathcal{Z}(F_0, ..., F_i)$ tem dimensão pura $n-i-1$ para $0 \leqslant i \leqslant n$.*

Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade de dimensão $n-k$. Então, pelo item (iii), $\mathcal{I}(V)$ não pode ser gerado por menos de $k$ polinômios. Quando $\mathcal{I}(V)$ é gerado por $k$ elementos dizemos que $V$ é uma *interseção completa*. Toda variedade projetiva não vazia cujo ideal associado é gerado pelos elementos de uma sequência $R$-regular é uma interseção completa. Isso segue da

**Proposição 2.9.** *Sejam $F_1, ..., F_d \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ homogêneos. Se $(F_1, ..., F_d)$ é uma sequência $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$-regular então $dim(\mathcal{Z}(F_1, ..., F_d)) = n-d$.*

*Demonstração.* Consulte [CLO07], página 464. □

De fato, veremos que o passo fundamental para a prova do **Teorema** $E_1$ será a recíproca dessa proposição.

Já sabemos qual é o grau de uma hipersuperfície em $\mathbb{P}^n$ e, para as provas dos **Teoremas** $E_1$ e $E_2$, não é necessário sabermos o conceito de grau de outras variedades. Por isso, não abordaremos esse conceito neste trabalho. No entanto, no próximo capítulo, diremos o grau de algumas variedades que não são hipersuperfícies. Nesses casos, daremos referências que justifiquem o valor informado. No caso das interseções completas, temos que

**Proposição 2.10.** *Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade não vazia. Sejam $F_1, ..., F_d \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ homogêneos tais que $\mathcal{I}(V) = \langle F_1, ..., F_d \rangle$. Se $(F_1, ..., F_d)$ é uma sequência $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$-regular então*

$$deg(V) = deg(F_1) \cdot ... \cdot deg(F_d)$$

*Demonstração.* Consulte [CLO07], página 465. □

## 2.4 O espaço tangente

**Definição 2.9.** *Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva não vazia. Suponhamos que $I(V) = \langle F_1, \cdots, F_r \rangle$, onde cada $F_i \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ é homogêneo. Para $v = (v_0 : ... : v_n) \in V$, definimos o Espaço Tangente a $V$ em $v$ como a variedade projetiva em $\mathbb{P}^n$ dada por*

$$T_v V = \mathcal{Z}\left(\sum_{i=0}^{n} \partial_i F_1(v_0, ..., v_n) t_i, ..., \sum_{i=0}^{n} \partial_i F_r(v_0, ..., v_n) t_i\right).$$

Observemos que a definição acima é coerente, pois:

i) Seja $F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](d)$, $d \geqslant 1$. Sejam $v_0, ..., v_n$ coordenadas homogêneas de $v \in \mathbb{P}^n$. Então, $\forall z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, temos que $\mathcal{Z}(\sum_{i=0}^{n} \partial_i F(z(v_0, ..., v_n)) t_i) = \mathcal{Z}(z^{d-1} \sum_{i=0}^{n} \partial_i F(v_0, ..., v_n) t_i) = \mathcal{Z}(\sum_{i=0}^{n} \partial_i F(v_0, ..., v_n) t_i)$;

ii) O ideal $\langle \sum_{i=0}^{n} \partial_i F_1(v_0, ..., v_n) t_i, ..., \sum_{i=0}^{n} \partial_i F_r(v_0, ..., v_n) t_i \rangle$ é igual ao ideal $\langle \sum_{i=0}^{n} \partial_i F(v_0, ..., v_n) t_i ; F \in \mathcal{I}(V) \text{ é homogêneo} \rangle$.

Abusando da notação, escreveremos simplesmente

$$T_v V = \mathcal{Z}\left(\sum_{i=0}^{n} \partial_i F_1(v) t_i, ..., \sum_{i=0}^{n} \partial_i F_r(v) t_i\right).$$

**Exemplo 2.5.** *Temos que:*

*i) Para cada $v \in \mathbb{P}^n$, $T_v \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n$;*

*ii) Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície. Tomemos $F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ homogêneo tal que $I(V) = \langle F \rangle$. Então, para cada $v \in V$, $T_v V = \mathcal{Z}\left(\sum_{i=0}^{n} \partial_i F(v) t_i\right)$;*

*iii) Sejam $W \subset V \subset \mathbb{P}^n$ variedades. Então, para cada $v \in W$, $T_v W \subset T_v V$.*

Vamos agora discutir sobre a dimensão do espaço tangente.

**Proposição 2.11.** *Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade irredutível não vazia. Então existe um número $s \in \mathbb{N}$ tal que $dim(T_v V) \geqslant s$ para cada $v \in V$. Além disso, os pontos $w \in V$ tais que $dim(T_w V) > s$ formam uma subvariedade própria $W \subsetneq V$, isto é, uma subvariedade de dimensão menor.*

*Demonstração.* Consulte [Sha94], página 92. □

A partir disso, na página 93, [Sha94] dá a seguinte

**Definição 2.10.** *Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade irredutível. Seja $s = min_{v \in V} \{dim(T_v V)\}$. Dizemos que um ponto $v \in V$ é não singular se $dim(T_v V) = s$. $V$ é dita suave se todos os seus pontos são não singulares. Se $v \in V$ e $dim(T_v V) > s$, dizemos que $v$ é um ponto singular.*

Mantendo a notação dessa definição, [Sha94], ainda na página 93, demonstra que

**Teorema 2.2.** *A dimensão do espaço tangente em um ponto não singular é igual a dimensão da variedade.*

Concluímos que, para uma variedade projetiva irredutível $V$, $dim(T_vV) \geqslant dim(V)$ para cada $v \in V$. Essa conclusão não é sempre verdadeira quando a variedade é redutível. O caso das variedades projetivas redutíveis também é tratado por [Sha94]. Primeiro, na página 94, ele dá a seguinte

**Definição 2.11.** *Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade. A dimensão de $V$ em um ponto $v$, denotada por $dim_v(V)$, é o máximo das dimensões das componentes irredutíveis de $V$ contendo $v$.*

Depois, denotando por $V^i$, para $i = 1, ..., r$, as componentes irredutíveis de $V$ que passam por um ponto fixado $v \in V$ e utilizando o Teorema 2.2, ele prova que

$$dim(T_vV) \geqslant max_i \left\{dim(T_vV^i)\right\} \geqslant max_i \left\{dim(V^i)\right\} = dim_v(V).$$

Ele finaliza com uma nova

**Definição 2.12.** *Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade. Dizemos que um ponto $v \in V$ é não singular se $dim(T_vV) = dim_vV$. Uma variedade $V$ é suave se todos os seus pontos são não singulares.*

Notemos que, quando $V$ é irredutível, $dim_v(V) = dim(V)$ para cada $v \in V$. Assim, essa nova definição equivale a anterior quando $V$ é irredutível.

Olhemos mais de perto o caso das hipersuperfícies. Primeiro verifiquemos o seguinte

**Lema 2.2** (fórmula de Euler). *Seja $F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](d)$. Então $dF = \sum_{i=0}^{n} \partial_i F t_i$.*

*Demonstração.* Como ambos os membros da igualdade são lineares como funções de $F$, é suficiente verificarmos quando $F$ é um monômio, o que é imediato. □

**Proposição 2.12.** *Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície. Seja $F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](d)$ tal que $\mathcal{I}(V) = \langle F \rangle$. Então:*

*i)* $\forall v \in V$, $v \in T_vV$;

*ii)* $\mathcal{Z}(\partial_0 F, \cdots, \partial_n F) \subset \mathcal{Z}(F)$;

*iii)* *$V$ é suave se e só se* $\mathcal{Z}(\partial_0 F, ..., \partial_n F) = \emptyset$;

*iv) Suponhamos que $n \geqslant 2$. Se $V$ é suave então $F$ é irredutível.*

*Demonstração.* Para cada $v \in V$, $T_vV = \mathcal{Z}\left(\sum_i \partial_i F(v)t_i\right)$. Assim, $(i)$ e $(ii)$ seguem da fórmula de Euler.

O item $(iii)$ segue: do item anterior, do Exemplo 2.4 e do fato que

$$T_vV = \begin{cases} \mathbb{P}^n \text{ se e só se } v \in \mathcal{Z}(\partial_0 F, \cdots, \partial_n F) \\ \quad \text{uma hiperplano caso contrário} \end{cases}$$

Para mostrarmos $(iv)$, suponhamos, por absurdo, que $F = GH$, com $G, H$ não constantes. Como $n \geqslant 2$, pelo Corolário 2.2, existe $v \in \mathcal{Z}(G, H) \subset V$. Para $0 \leqslant i \leqslant n$, temos que $\partial_i F = H\partial_i G + G\partial_i H$. Assim, $v \in Z(\partial_0 F, ..., \partial_n F)$. Por $(iii)$, $V$ não é suave. Contradição com a hipótese.

$\square$

# Capítulo 3

# Campos Vetoriais Sobre $\mathbb{P}^n$ E Hipersuperfícies Invariantes

Concluiremos o trabalho demonstrando os **Teoremas** $E_1$ e $E_2$.

Na seção 3.1 recordaremos a definição de um campo de vetorial polinomial $\omega$ sobre $\mathbb{C}^{n+1}$. Inicialmente o veremos como um mapa e depois como uma derivação sobre $(\mathbb{C}[t_0, ..., t_n], +)$. Mostraremos que quando esse campo é homogêneo ele induz um campo de retas $X$ com singularidades sobre $\mathbb{P}^n$. Por um abuso de linguagem, diremos que $X$ é um campo vetorial sobre $\mathbb{P}^n$. Diremos que o grau de $X$ é o grau de $\omega$. Veremos que campos homogêneos de mesmo grau distintos sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ podem induzir o mesmo campo $X$. Definiremos variedades integrais de $X$ e analisaremos alguns exemplos.

Na seção 3.2 apresentaremos a questão de H. Poincaré:*Seja $X$ um campo vetorial de grau $m$ sobre $\mathbb{P}^2$. Será possível limitarmos o grau das curvas planas deixadas invariantes por $X$ através de $m$?*. Veremos que, em geral, a resposta é não e analisaremos alguns exemplos.

Na seção 3.3 demonstraremos os **Teoremas** $E_1$ e $E_2$. Para isso, utilizaremos vários resultados dos capítulos anteriores, principalmente do Capítulo 1. Encerraremos aplicando o **Teorema** $E_2$ para mostrarmos que é possível limitarmos o grau das curvas em $\mathbb{P}^n$ invariantes por um campo $X$ através do grau de $X$ quando esta é interseção completa de hipersuperfícies suaves invariantes por $X$.

## 3.1 Campos vetoriais sobre $\mathbb{P}^n$

Iniciemos recordando sobre campos em $\mathbb{C}^{n+1}$.

**Definição 3.1.** *Um campo vetorial polinomial ou simplesmente um campo vetorial sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ é um mapa*

$$\begin{array}{rcl} \omega = (G_0, ..., G_n) : \mathbb{C}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \\ p = (p_o, ..., p_n) & \longmapsto & \omega(p) = (G_0(p_o, ..., p_n), ..., G_n(p_o, ..., p_n)) \end{array}$$

*onde cada $G_i \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$. Tal campo define uma EDO autônoma (isto é, que não depende do tempo): $\dot{x} = \omega(x)$. Quando, para todo $i$, $G_i \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](m)$, dizemos que $\omega$ é um campo vetorial homogêneo de grau $m$.*

Denotamos por $CV$ o conjunto dos campos vetoriais sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ e por $CV(m)$ o conjunto dos campos vetoriais homogêneos de grau $m$. Ambos são, naturalmente, $\mathbb{C}$-espaços vetoriais. Veremos agora que tais campos podem ser tratados como *derivações*.

Dados $G_0, ..., G_n \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$, temos que o mapa

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=0}^n G_i \partial_i : (\mathbb{C}[t_0, ..., t_n], +) & \longrightarrow & (\mathbb{C}[t_0, ..., t_n], +) \\ F & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^n G_i \partial_i F \end{array}$$

é uma *derivação* $\mathbb{C}$-linear sobre $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$, isto é, $\sum_{i=0}^n G_i \partial_i$ define um endomorfismo de grupo sobre $(\mathbb{C}[t_0, ..., t_n], +)$ tal que, para quaisquer $F_1, F_2 \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ e $z \in \mathbb{C}$, temos que:

i) regra de Leibniz: $\sum_{i=0}^n G_i \partial_i (F_1 F_2) = F_1 \sum_{i=0}^n G_i \partial_i F_2 + F_2 \sum_{i=0}^n G_i \partial_i F_1$;

ii) $\mathbb{C}$-linearidade: $\sum_{i=0}^n G_i \partial_i (z F_1) = z \sum_{i=0}^n G_i \partial_i F_1$.

(Para mais informações sobre derivação, consulte [Eis95], página 385).

Seja $D(m) := \{\sum_{i=0}^n G_i \partial_i ;\ G_i \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](m)\}$.

Dados $\sum_{i=0}^n G_i \partial_i$, $\sum_{i=0}^n G'_i \partial_i \in D(m)$ e $z \in \mathbb{C}$, definimos

$$\sum_{i=0}^n G_i \partial_i + \sum_{i=0}^n G'_i \partial_i = \sum_{i=0}^n (G_i + G'_i) \partial_i \text{ e } z \sum_{i=0}^n G_i \partial_i = \sum_{i=0}^n z G_i \partial_i .$$

Claramente, $D(m)$ é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial. Notemos que o mapa

$$\begin{array}{rcl} \varphi : CV(m) & \longrightarrow & D(m) \\ \omega = (G_0, ..., G_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^n G_i \partial_i \end{array}$$

é claramente uma aplicação $\mathbb{C}$-linear sobrejetora. Além disso, se $\omega = (G_0, ..., G_n)$ e $\varphi(\omega) = 0$, então $\sum_{i=0}^{n} G_i \partial_i F = 0$ para todo $F \in R$. Em particular, tomando $F = t_j$, temos que $G_j = \sum_{i=0}^{n} G_i \partial_i t_j = 0$. Logo, $\varphi$ é um isomorfismo.

Chamaremos $E = \sum_{i=0}^{n} t_i \partial_i$ de campo radial (ou de Euler).

**Definição 3.2.** *Seja $\omega \in CV$. Dizemos que um ponto $p \in \mathbb{C}^{n+1}$ é uma singularidade ou um ponto singular de $\omega$ se $\omega(p) = O$; regular caso contrário. Quando $p$ é regular, dizemos que $\overrightarrow{O\omega(p)}$ é a direção dada por $\omega$ em $p$. Denotamos por $Sing(\omega)$ o conjunto das singularidades de $\omega$. As soluções de $\dot{x} = \omega(x)$ são chamadas de soluções, trajetórias ou curvas integrais de $\omega$.*

Seja $\omega = (G_0, ..., G_n) \in CV(m)$. Seja $(p_0, ..., p_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Então, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, temos que

$$(G_0(zp_o, ..., zp_n), ..., G_n(zp_o, ..., zp_n)) = z^m (G_0(p_o, ..., p_n), ..., G_n(p_o, ..., p_n)).$$

Assim, o mapa

$$\begin{aligned} \omega = (G_0, ..., G_n) : \mathbb{P}^n \quad &\dashrightarrow \quad \mathbb{P}^n \\ p = (p_o : ... : p_n) \quad &\longmapsto \quad \omega(p) = (G_0(p_o, ..., p_n) : ... : G_n(p_o, ..., p_n)) \end{aligned}$$

está bem definido em $\mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}(G_0, ..., G_n)$. Se $\omega(p) \neq p$ então podemos falar na reta em $\mathbb{P}^n$ definida por esses pontos, que é dada por:

$$\ell_{\omega(p)} = \{(rp_0 + sG_0(p) : ... : rp_n + sG_n(p)); (r : s) \in \mathbb{P}^1\}.$$

Dessa forma, um campo vetorial homogêneo sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ induz um *campo de retas* sobre $\mathbb{P}^n$, "possivelmente com singularidades".

**Definição 3.3.** *Um campo vetorial $X$ de grau $m$ sobre $\mathbb{P}^n$ é um campo de retas sobre $\mathbb{P}^n$ induzido por um campo homogêneo $\omega = \sum_{i=0}^{n} G_i \partial_i$ de grau $m$ sobre $\mathbb{C}^{n+1}$. Dizemos que a reta $\ell_{X(p)} := \ell_{\omega(p)}$, definida acima, é a direção dada por $X$ em $p$. Os pontos em $\mathbb{P}^n$ para os quais o mapa ou a direção não está definido são chamados de singularidades de $X$. Denotamos por $Sing(X)$ o conjunto de singularidades de $X$.*

Semelhante ao problema de EDO associado a um campo sobre $\mathbb{C}^{n+1}$, podemos procurar curvas algébricas $C$ em $\mathbb{P}^n$ que satisfaçam: para cada $p \in C \setminus Sing(X)$, $\ell_{X(p)} \in T_pC$. A diferença é que em $\mathbb{C}^{n+1}$ tinhamos as velocidades, os vetores tangentes, mas em $\mathbb{P}^n$ temos apenas as retas tangentes.

Acima, escrevemos a expressão: "possivelmente com singularidades". Mas, de fato, um campo vetorial $X$ de grau $m$ sobre $\mathbb{P}^n$ sempre tem singularidades. Além disso, se ele for induzido por $\sum_{i=0}^n G_i\partial_i$ e esses polinômios $G_i$ são gerais, então $\#Sing(X) = m^n + m^{n-1} + ... + m + 1$ (consulte [NS97], página 71). Por exemplo, tomemos $X$ o campo vetorial de grau zero sobre $\mathbb{P}^n$ induzido por $\sum_{i=0}^n a_i\partial_i$. Se $a_i = 0$ para todo $i$, então $Sing(X) = \mathbb{P}^n$. Se algum $a_i \neq 0$ então $Sing(X) = \{(a_0 : ... : a_n)\}$.

Seja $X$ um campo vetorial de grau 1 sobre $\mathbb{P}^n$, digamos induzido por $\omega = (G_0, ..., G_n)$. Se a matriz $M = [\partial_j G_i]_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ é invertível então as singularidades de $X$ são os auto-espaços de $M$, isto é, as retas em $\mathbb{C}^{n+1}$ que passam pela origem e que são invariantes por $M$.

Observemos agora que $Sing(X)$ é uma variedade projetiva em $\mathbb{P}^n$. Suponhamos que $X$ é induzido por $\omega = \sum_{i=0}^n G_i\partial_i \in CV(m)$. Seja $Z_\omega$ o lugar dos zeros em $\mathbb{P}^n$ dos menores $2 \times 2$ da matriz

$$\mathbf{M}_\omega = \begin{pmatrix} t_0 & \dots & t_n \\ G_0 & \dots & G_n \end{pmatrix}.$$

Então $Sing(X) = Z_\omega$, pois

$$p = (p_0 : ... : p_n) \in Z_\omega \Leftrightarrow p_i G_j(p) = p_j G_i(p), \forall i < j \Leftrightarrow p \in Z(G_0, ...G_n) \text{ ou } p = \omega(p).$$

Ainda que um campo homogêneo sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ seja não nulo, ele pode induzir sobre $\mathbb{P}^n$ um campo totalmente singular. De fato, temos que

**Proposição 3.1.** *Seja $X$ o campo vetorial de grau $m$ sobre $\mathbb{P}^n$ induzido por $\omega = \sum_{i=0}^n G_i\partial_i$. Então $Sing(X) = \mathbb{P}^n$ se e só se $\omega = FE$, onde $F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](m-1)$ (convencionemos $F = 0$ se $m = 0$).*

*Demonstração.* Suponhamos que $Sing(X) = \mathbb{P}^n$. Se $\omega$ é nulo então $\omega = 0E$. Se $m = 0$ então, novamente, $G_i = 0$, $\forall i$, pois, se algum $G_i$ fosse uma constante não nula, $X$ teria apenas uma singularidade. Suponhamos que $\omega$ é não nulo e que $m \geqslant 1$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $G_0 \neq 0$. Devemos ter $\mathcal{Z}(t_0G_i - t_iG_0) = \mathbb{P}^n$, $\forall i$, isto é, $t_0G_i = t_iG_0$ em $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$, $\forall i$. Desde que $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ é um domínio fatorial, segue que existe $F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](m-1)$ tal que $G_i = Ft_i$, $\forall i$. Donde segue o resultado.

Suponhamos agora que $\omega = FE$, onde $F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](m-1)$. Então $t_iFt_j - t_jFt_i = 0$ em $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$, $\forall i < j$. Logo $Sing(X) = \mathbb{P}^n$. $\square$

Campos homogêneos de mesmo grau e distintos sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ podem induzir o mesmo campo de retas sobre $\mathbb{P}^n$ como mostra a seguinte

**Proposição 3.2.** *Seja $X$ o campo vetorial de grau $m$ sobre $\mathbb{P}^n$ induzido por $\omega = \sum_{i=0}^{n} G_i\partial_i$. Seja $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Seja $F \in \mathbb{C}[t_0,...,t_n](m-1)$ (convencionemos $F = 0$ se $m = 0$). Então o campo vetorial $\omega' = z\omega + FE$ de grau $m$ sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ também induz $X$.*

*Demonstração.* Chamemos de $Y$ o campo sobre $\mathbb{P}^n$ induzido por $\omega'$. Mostremos que $Sing(Y) = Sing(X)$ e que $\ell_{Y(p)} = \ell_{X(p)}$, $\forall p \notin Sing(Y)$. Sabemos que $Sing(Y)$ é o lugar dos zeros em $\mathbb{P}^n$ dos menores $2\times 2$ da matriz

$$\mathbf{M}_{\omega'} = \begin{pmatrix} t_0 & \dots & t_n \\ zG_0 + Ft_0 & \dots & zG_n + Ft_n \end{pmatrix}.$$

$\forall i < j$, $\mathcal{Z}(t_i(zG_j + Ft_j) - t_j(zG_i + Ft_i)) = \mathcal{Z}(z(t_iG_j - t_jG_i)) = \mathcal{Z}(t_iG_j - t_jG_i)$. Assim $Sing(Y) = Sing(X)$.

Tomemos $p \notin Sing(Y)$. Temos que:

$$\ell_{X(p)} = \{(rp_0 + sG_0(p) : ... : rp_n + sG_n(p)); (r : s) \in \mathbb{P}^1\}$$

Tomemos $r = F(p)$, $s = z$. Assim $\omega'(p) = (F(p)p_0 + zG_0(p) : ... : F(p)p_n + zG_n(p)) \in \ell_{X(p)}$. Logo, $\ell_{Y(p)} = \ell_{X(p)}$. □

**Observação 3.1.** *Sejam $\omega$, $\omega'$ como acima. Seja $p \in \mathbb{P}^n \setminus Sing(X)$. Apesar de estarem bem definidos os pontos $\omega(p)$ e $\omega'(p)$, não podemos afirmar que eles são iguais, mas apenas que eles e o ponto $p$ são colineares em $\mathbb{P}^n$. Por exemplo, consideremos os campos vetoriais homogêneos $\omega = t_0\partial_0 + t_0\partial_1$, $\omega' = \omega + E$ sobre $\mathbb{C}^{n+1}$. Seja $p = (1 : 0 : ... : 0)$. Então $p \notin Sing(X)$, mas $\omega(p) = (1 : 1 : 0 : ... : 0) \neq (2 : 1 : 0 : ... : 0) = \omega'(p)$.*

Analogamente a definição de curva integral de um campo vetorial sobre $\mathbb{C}^{n+1}$, temos a seguinte

**Definição 3.4.** *Seja $X$ um campo vetorial de grau $m$ sobre $\mathbb{P}^n$. Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva (curva). Dizemos que $V$ é uma variedade integral (curva integral) de $X$ quando $X_{|V}$ define um campo de retas sobre $V$, isto é, quando $\ell_{X(v)} \subset T_vV$ para cada $v \in V \setminus Sing(X)$. Também dizemos que $X$ deixa $V$ invariante.*

Essa definição é apenas geométrica. Algebricamente veremos que $V$ é invariante por $X$ se e só se o seu ideal associado é invariante pelo campo (derivação) que induziu $X$. Por isso usamos a nomenclatura: "$X$ deixa $V$ invariante".

**Proposição 3.3.** *Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Seja $X$ o campo vetorial sobre $\mathbb{P}^n$ induzido por $\omega = \sum_i G_i\partial_i$. Então $X$ deixa $V$ invariante se e só se $\sum_i G_i\partial_i F \in \mathcal{I}(V)$, $\forall F \in \mathcal{I}(V)$.*

*Demonstração.* Suponhamos que $\mathcal{I}(V) = \langle F_1, ..., F_k\rangle$. Vimos na página 31 que, para $v = (v_0 : ... : v_n) \in V$, $T_vV = \mathcal{Z}\left(\sum_i \partial_i F_1(v)t_i, ..., \sum_i \partial_i F_k(v)t_i\right)$.

($\Rightarrow$) Como $\mathcal{I}(V) = \langle F_1, ..., F_k\rangle$, então, pela regra de Leibniz, é suficiente mostrarmos que $\sum_i G_i\partial_i F_j \in \mathcal{I}(V)$ para $1 \leqslant j \leqslant k$. Isso ocorre se $\sum_i G_i\partial_i F_j = 0$ em $V$ para $1 \leqslant j \leqslant k$. Para $v \in V \setminus Sing(X)$, temos que $\omega(v) = (G_0(v) : ... : G_n(v)) \in T_vV$, enquanto que para $v \in V \cap Sing(X)$, temos que $v \in \mathcal{Z}(G_0, ..., G_n)$ ou $\omega(v) = v$. Como $v \in T_vV$, temos, em ambos os casos, que $\sum_i G_i(v)\partial_i F_j(v) = 0$ para $1 \leqslant j \leqslant k$.

($\Leftarrow$) Se $V \subset Sing(X)$, acabou. Se não, tomemos $v \in V \setminus Sing(X)$. Assim, estão bem definidos o ponto $\omega(v)$ e a reta $\ell_{X(v)} = \{(rv_0 + sG_0(v) : ... : rv_n + sG_n(v)); (r : s) \in \mathbb{P}^1\}$ em $\mathbb{P}^n$. Como $v \in T_vV$, para verificarmos que $\ell_{X(p)} \subset T_vV$, basta mostrarmos que $\omega(v) \in T_vV$. Por hipótese, temos, em particular, que $\sum_i G_i\partial_i F_j \in \mathcal{I}(V)$ para $1 \leqslant j \leqslant k$. Assim, $\sum_i \partial_i F_j(v)G_i(v) = 0$ para $1 \leqslant j \leqslant k$. Portanto, $\omega(v) \in T_vV$. $\square$

Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Sejam $X, \tilde{X}$ os campos vetoriais de grau $m$ sobre $\mathbb{P}^n$ induzidos, respectivamente, por $\omega = \sum_i G_i\partial_i, \tilde{\omega} = \sum_i \tilde{G}_i\partial_i$. Então, pela última proposição, é claro que:

i) Se $X$ e $\tilde{X}$ deixam $V$ invariante então o campo de grau $m$ sobre $\mathbb{P}^n$ induzido por $\omega + \tilde{\omega}$ deixa $V$ invariante;

ii) Seja $P \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](k)$. Se $X$ deixa $V$ invariante então o campo de grau $m + k$ sobre $\mathbb{P}^n$ induzido por $P\omega = \sum PG_i\partial_i$ deixa $V$ invariante. Em particular, se $V$ é invariante por um campo de grau $m$, então $V$ é invariante por um campo de grau $l$ para cada $l \geqslant m$.

Vamos aplicar a última proposição a alguns exemplos.

Em [Soa00], página 372, M. Soares afirma que a curva elíptica de grau 4, $\xi_4$, pode ser realizada como a interseção completa em $\mathbb{P}^3$ das hipersuperfícies definidas por $F_1 = t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$ e $F_2 = t_0t_2 + t_1t_3$, isto é, $\mathcal{I}(\xi_4) = \langle F_1, F_2\rangle$.

Notemos que $F_1, F_2$ são irredutíveis. Asssim, pelo Corolário 2.2, $dim(\xi_4) = 1$, isto é, $\xi_4$ é de fato uma curva. Além disso, $(F_1, F_2)$ é uma sequência $R$-regular. Então, pela Proposição 2.10, $deg(\xi_4) = deg(F_1).deg(F_2) = 4$.

Seja $X$ o campo de grau 3 sobre $\mathbb{P}^3$ induzido por $\omega = \sum_{i=0}^3 G_i\partial_i$, onde:

$$G_0 = -t_0^2t_1 + t_0t_2t_3,\ G_1 = -t_0t_1^2 + 2t_1t_2t_3 - t_0t_3^2,\ G_2 = -t_0t_1t_2 - t_1^2t_3 + t_2^2t_3 + t_3^3,\ G_3 = 0.$$

Vamos verificar que $\xi_4$ é uma curva integral de $X$.

Temos que:

$$\begin{aligned}
\omega(F_1) &= 2(-t_0^2t_1+t_0t_2t_3)t_0+2(-t_0t_1^2+2t_1t_2t_3-t_0t_3^2)t_1+2(-t_0t_1t_2-t_1^2t_3+t_2^2t_3+t_3^3)t_2\\
&= 2(-t_0^3t_1+t_0^2t_2t_3-t_0t_1^3+2t_1^2t_2t_3-t_0t_1t_3^2-t_0t_1t_2^2-t_1^2t_2t_3+t_2^3t_3+t_2t_3^3)\\
&= 2(t_0t_1(-t_0^2-t_1^2-t_2^2-t_3^2)+t_2t_3(t_0^2+2t_1^2-t_1^2+t_2^2+t_3^2))\\
&= 2(t_2t_3-t_0t_1)F_1 \in \langle F_1\rangle\\
\omega(F_2) &= (-t_0^2t_1+t_0t_2t_3)t_2+(-t_0t_1^2+2t_1t_2t_3-t_0t_3^2)t_3+(-t_0t_1t_2-t_1^2t_3+t_2^2t_3+t_3^3)t_0\\
&= -t_0^2t_1t_2+t_0t_2^2t_3-t_0t_1^2t_3+2t_1t_2t_3^2-t_0t_3^3-t_0^2t_1t_2-t_0t_1^2t_3+t_0t_2^2t_3+t_0t_3^3\\
&= -2t_0t_1(t_0t_2+t_1t_3)+2t_2t_3(t_0t_2+t_1t_3)\\
&= 2(t_2t_3-t_0t_1)F_2 \in \langle F_2\rangle
\end{aligned}$$

Como $\omega(t_3)=0$, então o hiperplano $\mathcal{Z}(t_3)$ também é invariante por $X$. De fato, $\mathcal{Z}(t_3) \subset Sing(X)$, pois $G_i(t_0,t_1,t_2,0)=(-t_0t_1)t_i$, para $0 \leqslant i \leqslant 2$, e $G_3=0$.

Seja $\widetilde{\omega}=\omega+t_0t_1E$. Pela Proposição 3.2, sabemos que $X$ também é induzido por $\widetilde{\omega}$. Temos que $\widetilde{\omega}=\sum_{i=0}^{3}\widetilde{G_i}\partial_i$, onde:

$$\widetilde{G_0}=t_0t_2t_3,\ \widetilde{G_1}=(2t_1t_2-t_0t_3)t_3,\ \widetilde{G_2}=(-t_1^2+t_2^2+t_3^2)t_3,\ \widetilde{G_3}=t_0t_1t_3.$$

Seja $\overline{\omega}=\sum_{i=0}^{3}\overline{G_i}\partial_i$, onde $\overline{G_i}=\dfrac{\widetilde{G_i}}{t_3}$ para $0 \leqslant i \leqslant 3$. Seja $Y$ o campo de vetores de grau 2 sobre $\mathbb{P}^3$ induzido por $\overline{\omega}$. Como $\widetilde{\omega}=t_3\overline{\omega}$, então:

i) $Sing(Y) \subset Sing(X)$;

ii) Se $v \in \mathbb{P}^3 \setminus Sing(X)$, então $\ell_{Y(v)}=\ell_{X(v)}$.

Vamos verificar que $\xi_4$ é uma curva integral de $Y$.

Temos que:

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}(F_1) &= 2t_0t_2t_0+2(2t_1t_2-t_0t_3)t_1+2(-t_1^2+t_2^2+t_3^2)t_2+2t_0t_1t_3\\
&= 2(t_0^2t_2+2t_1^2t_2-t_0t_1t_3-t_1^2t_2+t_2^3+t_2t_3^2+t_0t_1t_3)\\
&= 2(t_0^2+t_1^2+t_2^2+t_3^2)t_2=2t_2F_1 \in \langle F_1\rangle\\
\overline{\omega}(F_2) &= t_0t_2t_2+(2t_1t_2-t_0t_3)t_3+(-t_1^2+t_2^2+t_3^2)t_0+t_0t_1t_1\\
&= t_0t_2^2+2t_1t_2t_3-t_0t_3^2-t_0t_1^2+t_0t_2^2+t_0t_3^2+t_0t_1^2\\
&= 2t_2(t_0t_2+t_1t_3)=2t_2F_2 \in \langle F_2\rangle
\end{aligned}$$

O hiperplano $\mathcal{Z}(t_3)$ não é invariante por $Y$, pois $\overline{\omega}(t_3)=t_0t_1 \notin \langle t_3\rangle$. Em particular, $\mathcal{Z}(t_3) \not\subseteq Sing(Y)$. Assim, $Sing(Y) \subsetneq Sing(X)$. De fato, $Sing(Y)$ não contem uma hipersuperfície. Vamos verificar isso. Suponhamos que $\mathcal{Z}(F) \subset Sing(Y)$, onde $F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ é homogêneo e não constante. Podemos supor que $F$ é irredutível. Então, pelo que vimos na página 37, $\mathcal{Z}(F) \subset \mathcal{Z}(H_1, H_2)$, onde:

$$\begin{aligned} H_1 &= t_0\overline{G_1} - t_1\overline{G_0} = t_0(t_1t_2 - t_3), \\ H_2 &= t_0\overline{G_2} - t_2\overline{G_0} = t_0(t_3^2 - t_1^2) \end{aligned}$$

são dois dos menores $2 \times 2$ da matriz $M_{\overline{\omega}}$. A única hipersuperfície irredutível contida em $\mathcal{Z}(H_1, H_2)$ é $\mathcal{Z}(t_0)$. Assim, $F = t_0$. Mas o ponto $(0:0:0:1) \in \mathcal{Z}(t_0) \setminus Sing(Y)$, pois $\overline{\omega}(0:0:0:1) = (0:0:1:0)$.

Passemos a outro exemplo.

Fixemos $n \geqslant 2$. Para cada $d \geqslant 2$, seja $F_d = t_0^d + ... + t_n^d$. Seja $V_d = \mathcal{Z}(F_d) \subset \mathbb{P}^n$. Como $F_d$ é irredutível, então $\mathcal{I}(V_d) = \langle F_d \rangle$ e $deg(V_d) = d$.

Para $0 \leqslant i \leqslant n$, seja $X_i$ o campo vetorial de grau $d-1$ sobre $\mathbb{P}^n$ induzido por

$$\omega_i = t_i^{d-1}\partial_0 + ... + t_i^{d-1}\partial_{i-1} - (t_0^{d-1} + ... + \widehat{t_i^{d-1}} + ... + t_n^{d-1})\partial_i + t_i^{d-1}\partial_{i+1} + ... + t_i^{d-1}\partial_n.$$

Temos que

$$\omega_i(F_d) = d(t_i^{d-1}t_0^{d-1} + ... + t_i^{d-1}t_{i-1}^{d-1} - (t_0^{d-1} + ... + \widehat{t_i^{d-1}} + ... + t_n^{d-1})t_i^{d-1} + t_i^{d-1}t_{i+1}^{d-1} + ... + t_i^{d-1}t_n^{d-1}) = 0.$$

Assim, $V_d$ é invariante por $X_i$ para $0 \leqslant i \leqslant n$.

Notemos que $V_d$ é suave, pois $\mathcal{Z}(\partial_0 F_d, ..., \partial_n F_d) = \mathcal{Z}(t_0^{d-1}, ..., t_n^{d-1}) = \emptyset$. Será que é possível encontrarmos um campo vetorial de grau menor que $d-1$ sobre $\mathbb{P}^n$, não nulo, que deixe $V_d$ invariante? O **Teorema** $E_2$ garante que não.

## 3.2 Sobre a importância das hipóteses do Teorema $E_2$

Vamos iniciar com a seguinte questão: *Seja $X$ um campo vetorial de grau $m$ sobre $\mathbb{P}^2$. Será possível limitarmos o grau das curvas planas deixadas invariantes por $X$ através de $m$?*

A resposta é não. Podemos ver isso no seguinte

**Exemplo 3.1.** *Para cada $d \geqslant 2$, seja $F_d = t_0t_1^{d-1} - t_2^d \in \mathbb{C}[t_o, t_1, t_2]$. Seja $C_d = \mathcal{Z}(F_d) \subset \mathbb{P}^2$. Seja $X_d$ o campo vetorial de grau 1 sobre $\mathbb{P}^2$ induzido por $\omega_d = (d-1)t_0\partial_0 - t_1\partial_1$. Então, para cada $d \geqslant 2$, $C_d$ é uma curva plana de grau $d$ invariante por $X_d$.*

*Demonstração.* Como $F_d$ é irredutível, então: $\mathcal{I}(C_d) = \langle F_d \rangle$, $dim(C_d) = 1$ e $deg(C_d) = deg(F_d) = d$. Temos que

$$\omega(F_d) = (d-1)t_0t_1^{d-1} - (d-1)t_1t_0t_1^{d-2} = 0 \in \langle F_d \rangle.$$

Segue, pela Proposição 3.3, que $C_d$ é uma curva integral de $X_d$. $\square$

Assim, para cada $d \geqslant 2$, temos um campo de grau 1 sobre $\mathbb{P}^2$ que tem uma curva integral de grau $d$.

Observemos que $\mathcal{Z}(\partial_0 F_d, \partial_1 F_d, \partial_2 F_d) = \mathcal{Z}(t_1^{d-1}, t_0t_1^{d-2}, t_2^{d-1})$. Pela Proposição 2.12, $C_d$ é suave se e só se $\mathcal{Z}(t_1^{d-1}, t_0t_1^{d-2}, t_2^{d-1}) = \emptyset$. Assim, $C_d$ é suave se e só se $d = 2$ (para $d > 2$, $(1:0:0)$ é uma singularidade de $C_d$).

Consideremos a seguinte questão, extendendo a anterior: *Seja $X$ um campo vetorial de grau $m$ sobre $\mathbb{P}^n$. Será possível limitarmos o grau das curvas em $\mathbb{P}^n$ deixadas invariantes por $X$ através de $m$?*

Como era de se esperar, a resposta é não. Vamos ver isso através de uma "cópia" do exemplo acima.

**Exemplo 3.2.** *Para cada $d \geqslant 2$, sejam $F_1 = t_0t_1^{d-1} - t_2^d$, $F_2 = t_3, \ldots, F_{n-1} = t_n \in \mathbb{C}[t_o, \ldots, t_n]$. Seja $C_d = \mathcal{Z}(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}) \subset \mathbb{P}^n$. Seja $X_d$ o campo vetorial de grau 1 sobre $\mathbb{P}^n$ induzido por $\omega_d = (d-1)t_0\partial_0 - t_1\partial_1$. Então, para cada $d \geqslant 2$, $C_d$ é uma curva de grau $d$ invariante por $X_d$.*

*Demonstração.* Temos que $\mathcal{I}(C_d) = \langle F_1, t_3, \ldots, t_n \rangle$. Como $(F_1, t_3, \ldots, t_n)$ é uma sequência $\mathbb{C}[t_o, \ldots, t_n]$-regular, então, pelas Proposições 2.9 e 2.10, temos que $dim(C_d) = 1$ e $deg(C_d) = d$.

Temos que $\omega(F_i) = 0$ para $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Assim, pela Proposição 3.3, $C_d$ é uma curva integral de $X_d$. $\square$

Assim, para cada $d \geqslant 2$, temos um campo de grau 1 sobre $\mathbb{P}^n$ que tem uma curva integral de grau $d$.

Observemos que para $v = (v_o : \ldots : v_n) \in C_d$, temos que

$$T_vC_d = \mathcal{Z}(v_1^{d-1}t_0 + (d-1)v_0v_1^{d-2}t_1 - dv_2^{d-1}t_2, t_3, \ldots, t_n).$$

Se $d = 2$ então $C_d$ é suave. Para $d \geqslant 3$, temos que $v' = (1:0:\ldots:0)$ é uma singularidade de $C_d$, pois $T_{v'}C_d = \mathcal{Z}(t_3, \ldots, t_n)$ tem dimensão 2.

Nesses dois últimos exemplos, o campo depende de $d$. Vamos analisar um exemplo em que isso não ocorre.

**Exemplo 3.3.** *Suponhamos que $n \geqslant 3$. Para cada $d \geqslant 2$, sejam $F_1 = t_0t_2^{d-1} - t_1^d$, $F_2 = t_2 - dt_3$, $F_3 = t_4$,..., $F_{n-1} = t_n \in \mathbb{C}[t_o, ..., t_n]$ (Obs. Se $n = 3$, consideremos apenas os polinômios $F_1, F_2$). Seja $C_d = \mathcal{Z}(F_1, F_2, F_3, ..., F_{n-1}) \subset \mathbb{P}^n$. Seja $X$ o campo vetorial de grau 2 sobre $\mathbb{P}^n$ induzido por $\omega = t_0t_2\partial_0 + t_1t_3\partial_1$. Então, para cada $d \geqslant 2$, $C_d$ é uma curva de grau $d$ invariante por $X$.*

*Demonstração.* Esse exemplo aparece na página 14 de [Est02]. Nele, Esteves afirma que $\mathcal{I}(C_d) = \langle F_1, F_2, F_3, ..., F_{n-1}\rangle$. Como $(F_1, F_2, F_3, ..., F_{n-1})$ é uma sequência $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$-regular, pelas Proposições 2.9 e 2.10, temos que $dim(C_d) = 1$ e $deg(C_d) = d$.

Temos que:

$$\begin{aligned} \omega(F_1) &= t_0t_2t_2^{d-1} - dt_1t_3t_1^{d-1} = t_0t_2^d - t_2t_1^d + t_2t_1^d - dt_1^dt_3 = t_2F_1 + t_1^dF_2 \in \mathcal{I}(C_d) \\ \omega(F_i) &= 0 \text{ para } 2 \leqslant i \leqslant n-1. \end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 3.3, $C_d$ é uma curva integral de $X$. □

Assim, temos um campo de grau 2 sobre $\mathbb{P}^n$ que, para cada $d \geqslant 2$, tem uma curva integral de grau $d$.

Observemos que para $v = (v_o : ... : v_n) \in C_d$, temos que

$$T_vC_d = \mathcal{Z}(v_2^{d-1}t_0 - dv_1^{d-1}t_1 + (d-1)v_0v_2^{d-2}t_2, t_2 - dt_3, t_4, ..., t_n).$$

Se $d = 2$ então $C_d$ é suave. Para $d \geqslant 3$, temos que $v' = (1 : 0 : ... : 0)$ é uma singularidade de $C_d$, pois $T_{v'}C_d = \mathcal{Z}(t_2 - dt_3, t_4, ..., t_n)$ tem dimensão 2.

Notemos que, nesses três últimos exemplos, quando as curvas deixadas invariantes pelos campos são suaves, o grau delas é no máximo o grau do campo mais um. Assim, somos tentados a considerar a seguinte questão: *Seja $X$ um campo vetorial de grau $m$ sobre $\mathbb{P}^n$. Será possível limitarmos o grau das curvas suaves em $\mathbb{P}^n$ deixadas invariantes por $X$ através de $m$?*

Para $n \geqslant 3$, a resposta é não. Verifiquemos isso, inicialmente, com um exemplo em $\mathbb{P}^3$.

**Exemplo 3.4.** *Para cada natural $d \geqslant 1$, consideremos o mapa*

$$\begin{aligned} \varphi_d : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^3 \\ (p_o : p_1) &\longmapsto (p_0^d : p_0^{d-1}p_1 : p_0p_1^{d-1} : p_1^d) \end{aligned}$$

*Seja $C_d$ a imagem desse mapa. Seja $X_d$ o campo vetorial de grau 1 sobre $\mathbb{P}^3$ induzido por $\omega_d = dt_0\partial_0 + (d-2)t_1\partial_1 - (d-2)t_2\partial_2 - dt_3\partial_3$. Então, para cada $d \geqslant 2$, $C_d$ é uma curva suave de grau $d$ invariante por $X_d$.*

*Demonstração.* Esse exemplo também aparece na página 14 de [Est02]. Nele, Esteves afirma que $C_d$ é uma curva suave de grau $d$ e que $\mathcal{I}(C_d) = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$, onde: $F_1 = t_1t_2 - t_0t_3$, $F_2 = t_1^{d-1} - t_2t_0^{d-2}$, $F_3 = t_2^{d-1} - t_1t_3^{d-2} \in \mathbb{C}[t_o, ..., t_3]$.

Temos que

$$\begin{aligned}
\omega(F_1) &= -dt_0t_3 + (d-2)t_1t_2 - (d-2)t_2t_1 + dt_3t_0 = 0\\
\omega(F_2) &= -d(d-2)t_2t_0^{d-2} + (d-2)(d-1)t_1^{d-1} + (d-2)t_2t_0^{d-2}\\
&= (d-2)(d-1)F_2\\
\omega(F_3) &= -(d-2)t_1t_3^{d-2} - (d-2)(d-1)t_2^{d-1} + d(d-2)t_1t_3^{d-2}\\
&= -(d-1)(d-2)F_3
\end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 3.3, $C_d$ é uma curva integral de $X_d$. □

Para $n \geqslant 4$, basta "copiarmos" o exemplo acima.

**Exemplo 3.5.** *Para cada natural $d \geqslant 1$, consideremos o mapa*

$$\begin{aligned}
\varphi_d : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^n\\
(p_o : p_1) &\longmapsto (p_0^d : p_0^{d-1}p_1 : p_0p_1^{d-1} : p_1^d : 0 : ... : 0)
\end{aligned}$$

*Seja $C_d$ a imagem desse mapa. Seja $X_d$ o campo vetorial de grau 1 sobre $\mathbb{P}^n$ induzido pelo campo $\omega_d$ do último exemplo. Então, para cada $d \geqslant 2$, $C_d$ é uma curva suave de grau $d$ invariante por $X_d$.*

Seja $X$ um campo vetorial não nulo de grau $m$ sobre $\mathbb{P}^2$. Na próxima seção, mostraremos que é possível limitarmos o grau das curvas planas suaves deixadas invariantes por $X$ através de $m$. Mais geralmente, mostraremos que vale o **Teorema** $E_2$.

## 3.3 Os Teoremas $E_1$ e $E_2$

Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície de grau $d$. Seja $F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](d)$ tal que $\mathcal{I}(V) = \langle F \rangle$. Pela Proposição 3.3, é fácil construirmos um campo vetorial sobre $\mathbb{P}^n$ que a deixe invariante. Por exemplo, o induzido por

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} P_{i,j}(\partial_j F\partial_i - \partial_i F\partial_j) \tag{3.1}$$

onde todos os $P_{i,j} \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ são homogêneos de mesmo grau, pois

$$\sum_{i<j} P_{i,j}(\partial_j F\partial_i F - \partial_i F\partial_j F) = 0$$

No sentido contrário, Esteves provou em [Est02], página 6, o **Teorema** $E_1$. (Como ele mesmo garante, a prova se baseia nas idéias de O. Zariski que foram publicadas por J. Lipman em [Lip65], parte $c$ do Exemplo 7, página 892). O interessante é que esse teorema dá uma caracterização dos campos de vetores sobre $\mathbb{P}^n$ que deixam uma hipersuperfície suave fixada invariante. Vamos, FINALMENTE, ver detalhadamente a prova desse teorema.

**Teorema** $E_1$. *Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície suave de grau $d$. Seja $F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](d)$ tal que $\mathcal{I}(V) = \langle F\rangle$. Então cada campo vetorial $X$ sobre $\mathbb{P}^n$ que deixa $V$ invariante é induzido por um campo da forma* (3.1)*, para certos $P_{i,j} \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ homogêneos de mesmo grau.*

*Demonstração.* Denotemos por $R = \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$. Seja $X$ um campo vetorial de grau $m$ sobre $\mathbb{P}^n$ que deixa $V$ invariante. Digamos que ele é induzido por $\sum_i G_i\partial_i$. Pela Proposição 3.3, existe $P \in R$ tal que

$$\sum_i G_i\partial_i F = PF \tag{3.2}$$

Para cada $i$, $\partial_i F \in R(d-1)$ e $G_i \in R(m)$. Assim, $P \in R(m-1)$.

Vamos separar a prova em dois casos.

Suponhamos que $d = 1$. Por uma mudança de coordenadas, podemos supor que $F = t_0$. Então, por (3.2), temos que $G_0 = Pt_0$. Definindo $P_{i,j} = Pt_j - G_j$ para $i = 0, 1 \leqslant j \leqslant n$ e $P_{i,j} = 0$ caso contrário, temos que

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} P_{i,j}(\partial_j F\partial_i - \partial_i F\partial_j) = \sum_{0<j\leqslant n} -P_{0,j}\partial_j = \sum_{0\leqslant j\leqslant n} -P_{0,j}\partial_j,$$

onde $P_{0,0} = 0$. Como $G_0 = Pt_0$, temos que $P_{0,j} = Pt_j - G_j$ para $0 \leqslant j \leqslant n$. Assim,

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} P_{i,j}(\partial_j F\partial_i - \partial_i F\partial_j) = \sum_{0\leqslant j\leqslant n} G_j\partial_j - PE,$$

onde $E$ é o campo radial. Como $deg(P) = m - 1$, pela Proposição 3.2, o campo $\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} P_{i,j}(\partial_j F\partial_i - \partial_i F\partial_j)$ induz $X$. Além disso, $deg(P_{i,j}) = m$ para $0 \leqslant i < j \leqslant n$. Encerramos assim esse caso.

Suponhamos, a partir de agora, que $d \geqslant 2$. Para $0 \leqslant i \leqslant n$, identifiquemos:

i) $a_i = \partial_i F$;

ii) $\partial_i$ com o elemento $e_i$ da base canônica de $R^{n+1}$.

Consideremos os mapas $\varphi_n, \psi_n$ definidos em (1.3), página 17. Temos que:

$$Im(\varphi_n) = \left\{ \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} P_{i,j}(\partial_j F\partial_i - \partial_i F\partial_j); P_{i,j} \in R \right\},$$

$$Ker(\psi_n) = \left\{ \sum_{0\leqslant i\leqslant n} G_i\partial_i; \sum_{0\leqslant i\leqslant n} G_i\partial_i F = 0 \right\}.$$

Lembremos que, pela Proposição 1.13, página 17: se $(\partial_0 F, ..., \partial_n F)$ é uma sequência $R$-regular então $Ker(\psi_n) = Im(\varphi_n)$. Suponhamos, por enquanto, que essa sequência é $R$-regular.

Pela fórmula de Euler, página 32,

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant n} t_i\partial_i F = dF \tag{3.3}$$

Isolando $F$ em (3.3) e substituindo em (3.2), obtemos

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant n} (G_i - \frac{t_i P}{d})\partial_i F = 0 \tag{3.4}$$

Definamos $\tilde{G}_i = G_i - \frac{t_i P}{d}$. Temos que

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant n} \tilde{G}_i\partial_i = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} G_i\partial_i - \frac{P}{d}E$$

Novamente, como $deg(P) = m - 1$, então o campo $\sum_{0\leqslant i\leqslant n} \tilde{G}_i\partial_i$ também induz $X$.

$$\sum \tilde{G}_i\partial_i F = 0$$

Por (3.4) e pela Proposição 1.13, temos que

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant n} \tilde{G}_i\partial_i = \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} P_{i,j}(\partial_j F\partial_i - \partial_i F\partial_j),$$

onde cada $P_{i,j} \in R$.

Para $0 \leqslant i \leqslant n$, temos que $\tilde{G}_i \in R(m)$, $\partial_i F \in R(d-1)$. Então, nessa última equação, podemos assumir que $P_{i,j} \in R(m-d+1)$ para $0 \leqslant i < j \leqslant n$. Portanto, $X$ é induzido por um campo da forma que desejávamos.

Notemos que em ambos os casos, $d = 1$ e $d \geqslant 2$, temos $P_{i,j} \in R(m-d+1)$.

Então, para concluirmos a prova desse teorema, basta mostrarmos que $(\partial_0 F, ..., \partial_n F)$ é uma sequência $R$-regular. Essa é a parte mais difícil desse teorema e é aqui que entrará a maquinária do Capítulo 1.

Como $V$ é suave, pela Proposição 2.12, $\mathcal{Z}(\partial_0 F, ..., \partial_n F) = \emptyset$. Assim, pelo Corolário 2.2, página 29, todas essas derivadas parciais são diferentes de zero. Além disso, como estamos supondo que $d \geqslant 2$, então todas essas derivadas parciais são homogêneas e não constantes.

Vamos mostrar a seguinte proposição que provará que $(\partial_0 F, ..., \partial_n F)$ é uma sequência $R$-regular.

**Proposição 3.4.** *Sejam $F_0, ..., F_n \in R \setminus \mathbb{C}$ homogêneos (não necessariamente de mesmo grau). Se $\mathcal{Z}(F_0, ..., F_n) = \emptyset$ então $(F_0, ..., F_n)$ é uma sequência $R$-regular.*

*Demonstração.* Seja $\eta = \langle t_0, ..., t_n \rangle \subset R$. Seja $R_\eta$ a localização de $R$ com relação ao sistema multiplicativo $R \setminus \eta$. Pelo Exemplo 1.8, página 15, $d(R_\eta) = n+1$. Vamos provar primeiro que $(F_0, ..., F_n)$ é uma sequência $R_\eta$-regular.

Por hipótese, $F_0, ..., F_n \in \eta$. Assim, $\langle F_0, ..., F_n \rangle R_\eta \neq R_\eta$.

Para $0 \leqslant i \leqslant n$, tomemos $M_i = R_\eta / \langle F_0, ..., F_{i-1} \rangle R_\eta$. $F_0 \notin DZ(R_\eta)$, pois este é um domínio. Suponhamos, por absurdo, que existe $k \in \{1, ..., n\}$ tal que $F_i \notin DZ(M_i)$ para $0 \leqslant i \leqslant k-1$, mas $F_k \in DZ(M_k)$.

Pela Proposição 1.5, página 7, temos que $F_k \in \widetilde{\text{þ}_k} \in Ass(M_k)$. Por definição, $\{F_0, ..., F_k\} \subset \widetilde{\text{þ}_k}$. Pela Proposição 1.1, página 4, $\widetilde{\text{þ}_k} = \text{þ}_k R_\eta$, onde $\text{þ}_k \in Spec(R)$. Pela Proposição 1.3, página 6, $dim\,(R_\eta/\text{þ}_k R_\eta) \leqslant dim(R/\text{þ}_k)$.

Temos que $\{F_0, ..., F_k\} \subset \text{þ}_k$. Seja $\text{þ} \in Spec(R)$ um divisor primo minimal do ideal $\langle F_0, ..., F_k \rangle$. Então $dim(R/\text{þ}_k) \leqslant dim(R/\text{þ})$. Pela Proposição 2.5, página 27, $\mathcal{Z}(\text{þ})$ é uma componente irredutível de $\mathcal{Z}(F_0, ..., F_k)$. Como $\mathcal{Z}(F_0, ..., F_n) = \emptyset$, pelo Corolário 2.2, página 29, $dim(\mathcal{Z}(\text{þ})) = n-k-1$. Pela Proposição 2.6, página 28, $dim(R/\text{þ}) = n-k$. Assim, $dim(R_\eta/\widetilde{\text{þ}_k}) \leqslant n-k$.

Por outro lado, como $(F_0, ..., F_{k-1})$ é uma sequência $R_\eta$-regular, pelo Corolário 1.2, página 15, temos que $d(M_k) = d(R_\eta / \langle F_0, ..., F_{k-1} \rangle R_\eta) = d(R_\eta) - k = n+1-k$.

Assim $d(M_k) > dim(R_\eta/\widetilde{\mathfrak{p}_k})$, com $\widetilde{\mathfrak{p}_k} \in Ass(M_k)$. Isso contradiz a Proposição 1.12, página 16. Assim, tal valor $k$ não existe, isto é, $(F_0, ..., F_n)$ é uma sequência $R_\eta$-regular.

Logo, pela Proposição 1.9, página 12, $(F_0, ..., F_n)$ é uma sequência $R$-regular. $\square$

Portanto, $(\partial_0 F, ..., \partial_n F)$ é uma sequência $R$-regular. Consequentemente, vale o **Teorema** $E_1$. $\square$

Agora segue facilmente o segundo teorema provado por Esteves.

**Teorema** $E_2$. *Seja $X$ um campo vetorial não nulo de grau $m$ sobre $\mathbb{P}^n$. Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície de grau $d$. Se $V$ é suave e invariante por $X$ então $d \leqslant m+1$.*

*Demonstração.* Seja $F \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](d)$ tal que $\mathcal{I}(V) = \langle F \rangle$. Pelo teorema anterior e pela sua prova, o campo $X$ é induzido por uma expressão como em (3.1), página 45, onde $P_{i,j} \in R(m-d+1)$ para quaisquer $i, j$. Como $X \neq 0$, temos que $P_{i,j} \neq 0$ para certos $i, j$. Assim, $deg(P_{i,j}) = m - d + 1 \geqslant 0$, isto é, $d \leqslant m+1$. $\square$

Em particular, o grau das curvas planas deixadas invariantes por um campo vetorial não nulo $X$ de grau $m$ sobre $\mathbb{P}^2$ é no máximo $m+1$. Lembremos que, pelo Exemplo 3.1, página 41, essa cota pode ser atingida.

Vamos encerrar com uma aplicação do **Teorema** $E_2$.

**Proposição 3.5.** *Seja $C$ uma curva em $\mathbb{P}^n$ tal que $\mathcal{I}(C) = \langle F_1, ..., F_{n-1} \rangle$, onde $F_i \in \mathbb{C}[t_0, ..., t_n](d_i)$. Seja $X$ um campo vetorial não nulo de grau $m$ sobre $\mathbb{P}^n$. Se as hipersuperfícies $V_i = \mathcal{Z}(F_i)$ são suaves e invariantes por $X$, então $C$ também é invariante por $X$ e $deg(C) \leqslant (m+1)^{n-1}$.*

*Demonstração.* Como as hipersuperfícies $V_i$ são suaves, pela Proposição 2.12, página 32, os polinômios $F_i$ são irredutíveis. Assim, $\mathcal{I}(V_i) = \langle F_i \rangle$ e $deg(V_i) = d_i$.

Tomemos $v \in C \setminus Sing(X)$. Sabemos que

$$T_v C = \mathcal{Z}\left(\sum_{i=0}^{n} \partial_i F_1(v) t_i, ..., \sum_{i=0}^{n} \partial_i F_{n-1}(v) t_i\right) = T_v V_1 \cap ... \cap T_v V_{n-1}.$$

Como cada $V_i$ é invariante por $X$, então a reta $\ell_{X(v)} \subset T_v C$. Logo, $C$ é invariante por $X$.

Como $C = \mathcal{Z}(F_1, ..., F_{n-1})$ tem dimensão 1 e são exatamente $n-1$ polinômios, podemos afirmar, pela prova da Proposição 3.4, que $(F_1, ..., F_{n-1})$ é uma sequência $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$-regular. Assim, pela Proposição 2.10, página 30, $deg(C) = d_1 \cdot ... \cdot d_{n-1}$. Pelo **Teorema** $E_2$, $d_i \leqslant m+1$ para cada $i$. Portanto, $deg(C) \leqslant (m+1)^{n-1}$. $\square$

# Referências Bibliográficas


[AM94] M.F. Atiyah and I.G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Westview Pr, 1994.

[BM00] M. Brunella and LG Mendes, *Bounding the degree of solutions to Pfaff equations, preprint 206, U*, 2000, pp. 593–604.

[Car94] M.M. Carnicer, *The Poincaré problem in the nondicritical case*, Annals of mathematics **140** (1994), no. 2, 289–294.

[CC97] A. Campillo and M.M. Carnicer, *Proximity Inequalities and Bounds for the Degree of Invariant Curves by Foilations of* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, Transactions of the American Mathematical Society **349** (1997), no. 6, 2211–2228.

[CCGdlF00] A. Campillo, MM Carnicer, and J. Garcia de la Fuente, *Invariant curves by vector fields on algebraic varieties*, Journal of the London Mathematical Society **62** (2000), no. 1, 56–70.

[CLO07] D.A. Cox, J.B. Little, and D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, Springer Verlag, 2007.

[CN91] D. Cerveau and A.L. Neto, *Holomorphic foliations in* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *having an invariant algebraic curve*, Annales de l'institut Fourier, vol. 41, 1991, pp. 883–903.

[Eis95] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer, 1995.

[Est02] E. Esteves, *The Castelnuovo-Mumford regularity of an integral variety of a vector field on projective space*, Mathematical Research Letters **9** (2002), no. 1, 1–15.

[Kap70] I. Kaplansky, *Commutative Rings*, Springer, 1970.

[Kun85] E. Kunz, *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*, Birkhauser, 1985.

[LE06] Q. Liu and R. Erné, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford University Press, USA, 2006.

[Lip65] J. Lipman, *Free derivation modules on algebraic varieties*, American Journal of Mathematics **87** (1965), no. 4, 874–898.

[Mat86] H. Matsumura, *Commutative ring theory,Cambridge studies in advanced mathematics 8*, Cambridge Univ Press, 1986.

[Mum99] D. Mumford, *The red book of varieties and schemes, volume 1358 of Lecture Notes in Mathematics*, 1999.

[NR57] DG Northcott and D. Rees, *Extensions and simplifications of the theory of regular local rings*, Journal of the London Mathematical Society **1** (1957), no. 3, 367.

[NS97] A.L. Neto and B.A. Scárdua, *Folheações algébricas complexas, 21 Colóquio Brasileiro de Matemática*, IMPA, R.J. (1997).

[Poi91a] H. Poincaré, *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles*, C. R. Acad. Sci. **112** (1891), 761–764.

[Poi91b] ______, *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré*, Rend. Circ. Mat. Palermo **5** (1891), 161–191; **11** (1897), 193–239.

[Sha94] I.R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, Springer, 1994.

[Soa97] M.G. Soares, *The Poincaré problem for hypersurfaces invariant by one-dimensional foliations*, Inventiones mathematicae **128** (1997), no. 3, 495–500.

[Soa00] ______, *Projective varieties invariant by one-dimensional foliations*, Annals of Mathematics **152** (2000), no. 2, 369–382.