Equações Irracionais

Prof. Luciano Monteiro de Castro

1 Introdução

Nesta aula apresentamos uma alternativa para o método tradicional de resolução de equações irracionais envolvendo raízes quadradas (ou de índice par) no universo dos números reais. Ao invés de elevar a igualdade ao quadrado obtendo apenas uma implicação lógica que obriga a verificação dos valores encontrados na equação original, sugerimos utilizar a definição da raiz quadrada nos reais para obter uma equivalência lógica que exige maior cuidado mas dispensa a verificação final.

2 Um exemplo

Considere a seguinte equação no universo dos números reais:

$$2x - 1 = \sqrt{3x^2 - 2x + 2}. \qquad (1)$$

2.1 Solução tradicional

Seguindo o método tradicional, elevamos os dois lados da igualdade ao quadrado obtendo $(2x-1)^2 = 3x^2 - 2x + 2$, e simplificamos chegamos à equação do segundo grau $x^2 - 2x - 1 = 0$, que tem as duas raízes $1 - \sqrt{2}$ e $1 + \sqrt{2}$. Sabemos que essas são as únicas *possíveis* raízes da equação original mas, para ter certeza, devemos substituir x por cada um desses valores e verificar se a igualdade é verdadeira.

Para $x = 1 - \sqrt{2}$ obtemos $2\left(1-\sqrt{2}\right) - 1 = \sqrt{3\left(1-\sqrt{2}\right)^2 - 2\left(1-\sqrt{2}\right) + 2}$, e após algumas simplificações devemos decidir se a seguinte igualdade é verdadeira:

$$1 - 2\sqrt{2} = \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}. \qquad (2)$$

A maneira mais simples de observar que esta igualdade é falsa é ver que o número real $1 - 2\sqrt{2}$ é negativo, logo não pode ser a raiz quadrada de outro número real. De fato, temos $\sqrt{9-4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 1$, pois $9 - 4\sqrt{2} = \left(2\sqrt{2}-1\right)^2$ e $2\sqrt{2} - 1 \geq 0$.

De forma análoga, para $x = 1 + \sqrt{2}$ obtemos a igualdade

$$1 + 2\sqrt{2} = \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}. \qquad (3)$$

Esta igualdade é verdadeira, pois $9 + 4\sqrt{2} = \left(2\sqrt{2}+1\right)^2$ e $2\sqrt{2} + 1 \geq 0$.

Concluímos, assim, que a única raiz da equação (1) é $1 + \sqrt{2}$.

2.2 Analisando a solução tradicional

Na solução anterior, observamos que o passo de verificação final das raízes envolveu simplificações de expressões não triviais com números irracionais. Vamos analisar quais foram os fatos determinantes para nossa decisão a respeito da veracidade ou falsidade das igualdades (2) e (3).
Para decidir que a igualdade (2) é falsa, o fato decisivo foi que $1-2\sqrt{2} < 0$. Já para decidir que a igualdade (3) é falsa, além de observar que $1 + \sqrt{2} \geq 0$, tivemos que ver também que $9 + 4\sqrt{2} = \left(2\sqrt{2} + 1\right)^2$. No entanto, esta última igualdade é consequência direta de que $1+\sqrt{2}$ é raiz da equação $(2x-1)^2 = 3x^2-2x+2$, obtida de (1) elevando os dois membros ao quadrado. Isso significa que, na prática, esta parte da verificação era desnecessária. A partir dessa análise, um método mais eficiente pode ser obtido a partir da seguinte definição da raiz quadrada de números reais.

3 A definição da raiz quadrada em $\mathbb{R}$

Se a e b são números reais, dizemos, por definição que b é a *raiz quadrada* de a, representada por $\sqrt{a}$, quando b é um número não negativo cujo quadrado é igual a a, ou seja,

$$b = \sqrt{a} \iff \left(b^2 = a\right) \ \text{ e } \ (b \geq 0)\,.$$

Na prática, o primeiro passo do método tradicional (elevar ao quadrado) utiliza apenas parcialmente esta definição, com o importante inconveniente lógico de obter apenas uma implicação ao invés de uma equivalência:

$$b = \sqrt{a} \implies b^2 = a.$$

Com o pequeno esforço de acrescentar a condição $b \geq 0$, podemos executar passos muito parecidos aos do método tradicional com a vantagem lógica de trabalhar com equivalências, que dispensam a necessidade da verificação. Final. Apliquemos esta ideia ao mesmo exemplo.

4 Solução do exemplo usando equivalências lógicas

Voltemos à equação (1), lembrando que x representa uma variável real.

$$2x - 1 = \sqrt{3x^2 - 2x + 2}. \qquad (1)$$

Utilizando a definição da raiz quadrada em $\mathbb{R}$, obtemos a seguinte equivalência lógica:

$$2x - 1 = \sqrt{3x^2 - 2x + 2} \iff \left((2x-1)^2 = 3x^2 - 2x + 2\right) \ \text{ e } \ (2x - 1 \geq 0)\,.$$

Como trata-se de uma equivalência, os valores de x que tornam a sentença (1) verdadeira são exatamente os valores de x que tornam verdadeira a sentença equivalente

$$\left((2x-1)^2 = 3x^2 - 2x + 2\right) \ \text{ e } \ (2x - 1 \geq 0)\,,$$

Que é uma conjunção (conectivo e) da equação $(2x-1)^2 = 3x^2-2x+2$ e da inequação $2x-1 \geq 0$. Assim, desenvolveldo a equação como antes, reduzimos o problema a encontrar as raízes de $x^2 - 2x - 1 = 0$ que cumprem também a condição $2x - 1 \geq 0$, e concluímos imediatamente que $1 + \sqrt{2}$ é a única solução.

5 Conclusão

Analisando a solução tradicional fomos capazes de sugerir um método mais eficiente a partir da definição da raiz quadrada. Ao substituirmos uma implicação por uma equivalência eliminamos a necessidade da verificação final. Esta mesma ideia de analisar os passos lógicos de uma solução para identificar quais são equivalências e quais são implicações pode ser muito útil para aperfeiçoar outras técnicas de solução de equações e inequações de diversas naturezas. Em geral, é um bom hábito analisar nossas soluções após resolver um problema que nos desafia.