Probabilidade – parte I – Livro Aberto

I) Introdução

Nessa aula iremos explorar a noção de probabilidade para, em seguida, apresentar uma teoria matemática útil para calcular probabilidades de eventos associados a experimentos aleatórios, isto é, experimentos cujos resultados finais são conhecidos somente após a realização dos mesmos.

Por exemplo,

(1) o número de curtidas que você irá receber no período de 24h após a sua postagem em uma rede social;
(2) a quantidade de metros cúbicos de gás consumida na sua residência no primeiro semestre do próximo ano ;
(3) o tempo, contado a partir de hoje, que a lâmpada do seu quarto levará para queimar;
(4) o número de quilowatts consumidos na sua residência no próximo mês.

Em contraposição aos fenômenos aleatórios existem os fenômenos determinísticos, quando é possível determinar seu resultado mesmo antes de realizá-lo, conhecendo-se determinadas condições. Na natureza existem muitos exemplos de experimentos determinísticos. Por exemplo, na Física há vários modelos determinísticos, como

(5) a primeira lei de Newton que estabelece a força, conhecendo-se massa e aceleração;
(6) a lei do movimento retilíneo uniforme em que é possível calcular a distância percorrida pelo móvel, conhecendo-se a velocidade e tempo transcorrido;
(7) a lei da gravitação universal em que é possível calcular o tempo de queda de um objeto que é lançado em queda livre, conhecendo-se a altura, a aceleração da gravidade, desprezando a resistência do ar.

Tais modelos da Física são chamados modelos matemáticos determinísticos, uma vez que é possível determinar quantidades de interesse, conhecendo-se certas condições, mesmo sem a realização do experimento.

Para explicar fenômenos aleatórios como exemplificados nos itens (1) a (4), usamos modelos matemáticos não determinísticos chamados modelos probabilísticos. Neste caso, mesmo conhecendo algumas condições, não é possível determinar qual será o resultado antes da realização do experimento.

II) Um pouco de história da Probabilidade

Antes de começar o estudo um pouco mais formal de probabilidade, apresentaremos um breve resumo sobre a história da probabilidade.

A noção de acaso e ocorrências de fenômenos aleatórios foram percebidas sensorialmente pela humanidade bem antes de sermos capazes de utilizar a Matemática como forma de descrição do mundo. No entanto, a percepção antiga é de que havia uma razão mítica para o aparecimento de tais fenômenos. Há vários registros históricos de 2700 A.C. do uso de dados antigos (como os ossos astrágalos e dados egípcios), usados para uma tomada de decisão regida pelos Deuses do Acaso, quando o homem queria se eximir de sua responsabilidade na escolha e tomada de decisão.

A própria Bíblia nos informa que “não cai uma folha de uma árvore sem que o Pai não deseje". Essa crença de que deuses (no mundo panteísta) ou Deus (no mundo monoteísta) eram os regentes desses fenômenos, acarretou um atraso histórico na matematização do acaso e na criação da Teoria das Probabilidades, uma área considerada cognitivamente desafiadora até hoje na Ciência.

Por isso, foi preciso esperar os séculos XVI e XVII para que matemáticos como Cardano, Tartaglia, Pascal e Fermat, para citar alguns, conseguissem dar uma explicação mais consistente do conceito de acaso/aleatoriedade no seio da Matemática, a partir, primordialmente, do estudo de jogos de azar e de sua conexão estreita com a Análise Combinatória.

No entanto, poderíamos dizer que a ideia fundamental por trás da matematização do acaso reside essencialmente na Estatística, quando esta reconhece, pela sua própria natureza, que fenômenos aleatórios, embora sem explicação determinística, tendem a demonstrar uma certa taxa regular de ocorrência conforme são realizados vários experimentos similares ao longo do tempo. A busca de um modelo que explique tais regularidades de ocorrência do fenômeno em estudo é a ideia central da Teoria das Probabilidades e sua utilidade hoje em vários campos científicos, como Economia, Medicina, Robótica, Engenharia, Computação, Biologia etc., demonstra como a teoria está mais perto da Estatística do que da abordagem feita por meio do diálogo com a Análise Combinatória durante os Séculos das Luzes.

É somente na primeira metade do século XX que a teoria das probabilidades vai adquirir uma base axiomática rigorosa por meio da construção teórica estabelecida pelo matemático russo Kolmogorov. Desde então a teoria das probabilidades tem sido vista como uma das áreas mais promissoras da Matemática e a ferramenta por excelência para modelar e explicar os mais variados fenômenos aleatórios presentes no mundo contemporâneo.

III) Conceitos Básicos

Antes de apresentarmos diferentes interpretações de probabilidade, vamos começar definindo Espaço Amostral e Evento.

Espaço amostral: conjunto que compreende todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Usamos a letra maiúscula *S* para denotar espaço amostral.

Evento: é qualquer subconjunto ***A*** do espaço amostral ***S*** para o qual faz sentido atribuir uma probabilidade.

Ao realizar um experimento aleatório, dizemos que um evento ***A*** ocorreu, se o resultado tiver sido um elemento de ***A***. Por exemplo, se ao lançarmos um dado com as faces numeradas de 1 a 6, tiver ocorrido face 2 e ***A*** é o evento "a face voltada para cima corresponde a um número par", isto é, ***A***={2,4,6} dizemos que o evento ***A*** ocorreu.

Evento elementar: subconjunto unitário do espaço amostral ***S.***

Por exemplo, no lançamento de um dado, podemos representar o espaço amostral por ***S***={1,2,3,4,5,6}. Nesse caso, os eventos elementares são os conjuntos unitários: {1}, {2}, {3}, {4}, {5} e {6}.

IV) Álgebra de conjuntos: Operações de união, interseção e complementariedade

Faremos agora uma rápida revisão sobre operações entre conjuntos (união, interseção e complementariedade), pois eventos são conjuntos e nós estamos interessados em calcular probabilidades de eventos.

(a) União: O conjunto AUB (lê-se A união B) corresponde à reunião de todos os elementos de A e de B. Dizemos que o evento AUB ocorreu se **pelo menos um dos dois** eventos, A ou B, tiver ocorrido.
(b) Interseção: O conjunto A∩B (lê-se A interseção B) corresponde à coleção de todos os elementos que pertencem simultaneamente ao conjunto A e ao conjunto B. Dizemos que o evento A∩B ocorreu, se os eventos A e B tiverem ocorrido **simultaneamente**.
(c) Complementariedade: O conjunto $\overline{A}$ (lê-se A complementar) corresponde à coleção de todos os elementos do conjunto universo (espaço amostral S) que não pertencem ao conjunto A. Dizemos que o evento $\overline{A}$ ocorreu, se o evento A não tiver ocorrido.

Eventos disjuntos: Dois eventos A e B são ditos (eventos) disjuntos se A∩B=∅, ou seja, se A e B não tiverem elementos em comum.

Dado qualquer espaço amostral S, os conjuntos S e ∅ (conjunto vazio) são considerados eventos especiais e chamados de evento certo e evento impossível, respectivamente. Para o evento certo (S) atribui-se probabilidade 1 e, para o evento impossível ∅), atribui-se probabilidade zero. Para qualquer outro evento, a probabilidade deverá ser um número real no intervalo [0,1].

Para concluir essa breve revisão de operações com conjuntos, vamos apresentar algumas propriedades importantes de álgebra de conjuntos. Lembre-se que para provar que dois conjuntos A e B são iguais, basta provar que $A \subset B$ e que $B \subset A$.

AC1: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

AC2: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

AC3: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

AC4: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

AC1 e AC2 são conhecidas como as Leis de DeMorgan para dois eventos. AC3 e AC4 estabelecem as propriedades distributivas entre união e interseção.

V) Interpretações da probabilidade

4.1) Interpretação clássica de probabilidade

Na interpretação clássica de probabilidade todos os eventos elementares são considerados igualmente prováveis (equiprováveis).

Essa interpretação costuma ser usada em problemas envolvendo lançamento de dados, sorteios de cartas de um baralho e outros jogos. De fato, os primeiros trabalhos teóricos publicados envolvendo probabilidades no século XVII, fazem uso desta interpretação e envolvem cálculos de probabilidades de eventos em jogos de azar.

No entanto, nem sempre a interpretação clássica será adequada, pois nem todo espaço amostral finito tem eventos elementares equiprováveis. Por exemplo, pense numa moeda não balanceada a qual ao ser lançada resulta em cara com probabilidade 0,7 e coroa com probabilidade 0,5. Um outro problema com esta interpretação é a circularidade do conceito de probabilidade para definir a própria probabilidade, pois considera em sua definição "resultados igualmente prováveis" que depende do conceito de probabilidade.

4.2) Interpretação frequentista de probabilidade

Na interpretação frequentista de probabilidade, a probabilidade de um evento é definida como a frequência relativa de ocorrência deste evento, se o experimento for repetido, sob as mesmas condições, um grande número de vezes.

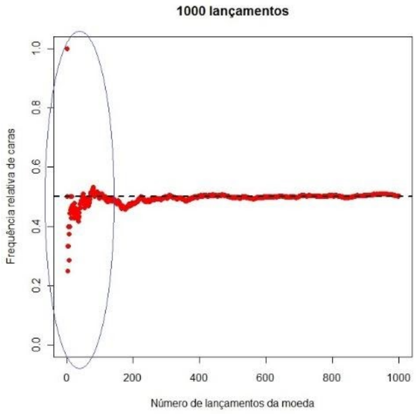
Problemas com esta definição envolvem falta de clareza: o que significam:

(a) "sob as mesmas condições"? e (b) "um grande número de vezes"?

Além disso, existem fenômenos únicos para os quais não é possível realizar repetições, por exemplo, o experimento que envolve uma partida de futebol com os mesmos times. Não é possível repetir esse experimento sob as mesmas condições ainda que com as mesmas equipes, no mesmo campo, e outras condições, é impossível garantir que as condições da partida sejam exatamente as mesmas.

No entanto, esta interpretação é muito útil e amplamente usada em modelagens probabilísticas. De fato, a interpretação frequentista de probabilidade tem suas origens com a Lei dos Grandes Números, importante resultado da teoria das probabilidades estabelecido pelo matemático suíço Jakob Bernoulli (1654 - 1705). Bernoulli afirmou que quanto maior o número de tentativas (repetições do experimento), mais a proporção de tentativas bem-sucedidas (frequência relativa de ocorrência do evento de interesse) se aproxima de p (probabilidade do evento de interesse ocorrer).

Veja na figura a seguir uma ilustração da Lei dos Grandes Números na qual mostra-se uma simulação do lançamento de uma moeda honesta (probabilidades iguais de cara e coroa) 1000 vezes. O gráfico ilustra a frequência relativa de caras, ou seja, número de caras obtidas sobre o número de lançamentos da moeda (eixo vertical) em função do número de lançamentos da moeda (eixo horizontal). A linha horizontal tracejada indica o valor 0,5, a probabilidade teórica de ocorrer cara para uma moeda honesta. Observe como rapidamente a frequência relativa se aproxima do valor teórico 0,5.



Simulação do lançamento de uma moeda honesta mil vezes: frequências relativas de cara

4.3) Interpretação subjetiva de probabilidade

Na interpretação subjetiva de probabilidade, as probabilidades de eventos são designadas de acordo com a experiência que o pesquisador tem sobre o fenômeno em investigação.

Uma crítica a esta interpretação é a de que pessoas diferentes podem atribuir probabilidades diferentes para um mesmo evento. No entanto, observe que as outras duas interpretações também são subjetivas.

O importante, quando se adota a interpretação subjetiva, é ter coerência. Por exemplo se sabemos que um evento A ocorre com frequência quatro vezes maior do que um evento B então devemos atribuir a probabilidade de A como 4 vezes a probabilidade atribuída a B.

Se a percepção de que é mais provável que certo evento ocorra do que ele não ocorra, atribuímos a ele uma probabilidade maior do que 0,5. Por outro lado, se temos a percepção de que é menos provável que certo evento ocorra do que ele não ocorra, atribuímos a ele uma probabilidade inferior a 0,5. Se temos a percepção de que não existe favorecimento entre a ocorrência ou não de certo evento, ou mesmo se não sabemos nada sobre ele, atribuímos a ele uma probabilidade de 0,5.

(VI) Definição Matemática da Probabilidade

No início do século XX, o matemático russo Kolmogorov, como já comentado, estabeleceu regras básicas para a probabilidade que independem da interpretação adotada, possibilitando assim, a construção de uma teoria matemática de probabilidade.

De maneira simplificada, essas regras básicas são apresentadas a seguir.

Seja S um espaço amostral. Uma probabilidade é uma função P que associa a cada subconjunto de S (evento) um número real, tal que

RB1: $P(A) \geq 0$ qualquer que seja $A \subset S$, ou seja, a probabilidade de qualquer evento A é um número não-negativo.

RB2: $P(S)=1$, ou seja, a probabilidade do evento certo é igual a 1.

RB3: Se $A,B \subset S$ com A e B eventos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$), então $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$.

Observação: RB3 é chamada propriedade aditiva da probabilidade para eventos disjuntos e, de fato, é um caso particular da propriedade de aditividade da probabilidade.

Suponha três eventos A, B e C disjuntos 2 a 2, ou seja, $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$. A regra da aditividade para a união destes três eventos resultará em $P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$. A propriedade de aditividade da probabilidade para eventos disjuntos vale para qualquer coleção de eventos disjuntos 2 a 2.

Observação: Independente da interpretação adotada, é fácil verificar que nas interpretações clássica e frequentista, as regras básicas são válidas. Na interpretação subjetiva, basta ter coerência ao designar probabilidades aos eventos de interesse.

(VII) Propriedades da probabilidade

A seguir, serão enumeradas algumas propriedades úteis no cálculo de probabilidades. Estas propriedades são consequências das regras básicas da probabilidade.

PP1: A probabilidade do evento vazio ($\emptyset$) é zero.

Esta propriedade é obtida das regras básicas $P(S)=1$ (RB2) e aditividade da probabilidade para eventos disjuntos (RB3), lembrando que $S \cup \emptyset = S$ e $S \cap \emptyset = \emptyset$.

Observe que de fato é natural que a probabilidade do evento vazio seja zero, pois um evento vazio nunca irá ocorrer.

PP2: A probabilidade de um evento A pode ser calculada por $P(A)= 1-P(\overline{A})$.

PP3: Dados A e B eventos em um espaço amostral S tais que $A \subset B$ (A está contido em B), então $P(A) \leq P(B)$.

Usando a regra básica (RB1) de que toda probabilidade é um número não-negativo e a regra básica de aditividade da probabilidade (RB3), tem-se

P(B)=P(AU $(\bar{A}\cap B)) = P(A) + P(\bar{A}\cap B) \geq P(A)$. Observe que A e $\bar{A}\cap B$ são eventos disjuntos e a igualdade vale porque ACB.

PP4: P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A∩B), quaisquer que sejam os eventos A e B de um espaço amostral S.

Usando a regra básica (RB3) e as identidades $B = (A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B)$ $A\cup B = A\cup(\bar{A}\cap B)$ tem-se $P(B) = P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B)$ $P(A\cup B) = P(A) + P(\bar{A}\cap B)$ tal que $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

A propriedade (PP4) pode ser estendida para uma coleção de 3 ou mais eventos. Por exemplo, é possível provar que dados A, B e C três eventos, então

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C).$$

Para demonstrar essa última identidade, basta usar (PP4) duas vezes. Primeiro, faça E=BUC e desenvolva P(AUE), usando (PP4). Em seguida você deverá aplicar a propriedade distributiva da interseção com a união para calcular P(A∩(BUC))=P((A∩B)U(A∩C)), usando novamente (PP4).

(VIII) Considerações finais e propostas de atividades

O material apresentado nessa aula faz parte das duas primeiras seções do capítulo de Probabilidade do Projeto Livro Aberto, cujo link é

https://umlivroaberto.org/producao/estatistica-e-probabilidade/

Recomendam-se as atividades das duas primeiras seções do capítulo de Probabilidade do Projeto Livro Aberto, além dos seis primeiros exercícios no final desse capítulo.