



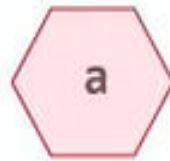
O pensamento multiplicativo e a BNCC

Áreas de Cognição

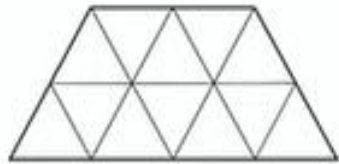
- **Visão Espacial**
- **Campos Aditivo**
- **Campo Multiplicativo**
- **Contagem**
- **Recorrência**
- **Álgebra** (aghhhhh!)

Visão Espacial...

Você dispõe, à vontade, de peças como as indicadas, que podem ser giradas.



Qual o MENOR número necessário de peças (não importa o tipo) para preencher cada uma das figuras a seguir?

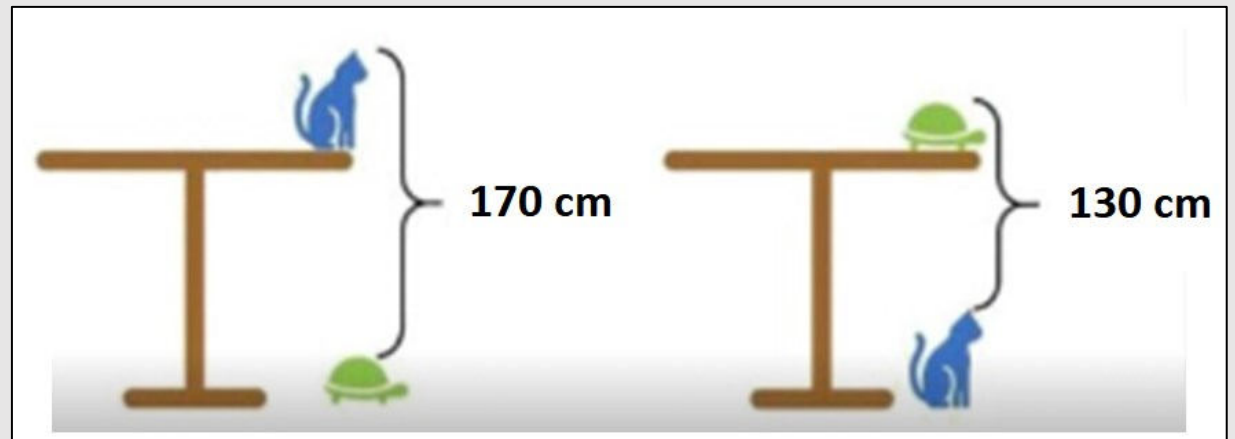


Campo Aditivo...

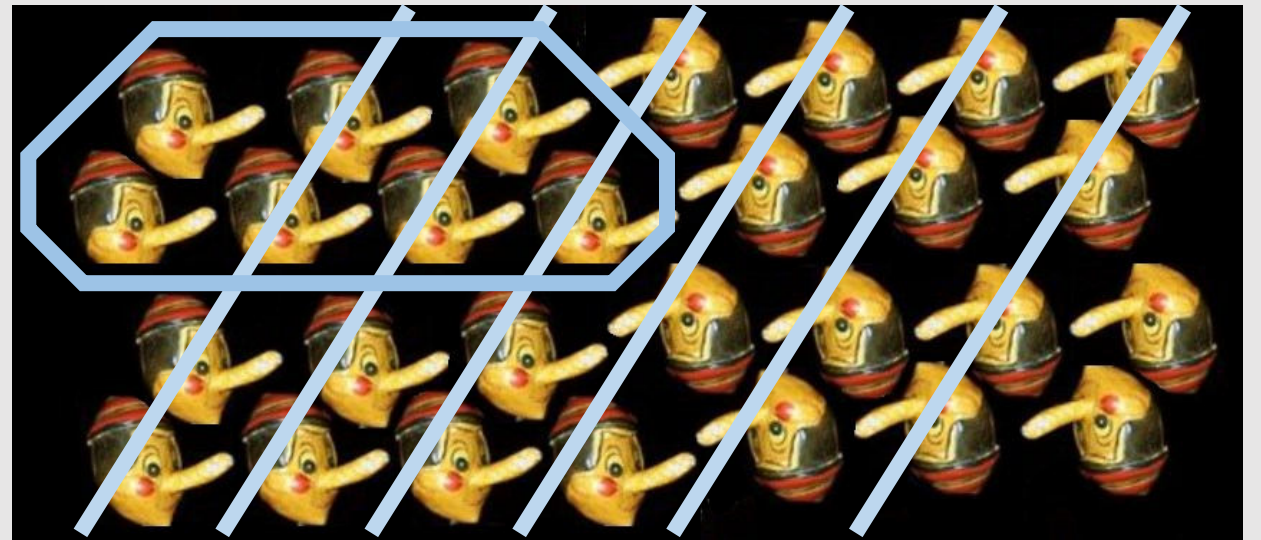
**João possui 3 balas e Maria 10.
Quanta balas possuem ao todo?**

**João possui 3 balas e Maria 10.
Quanta balas João precisa ganhar
para ficar com a mesma quanti-
dade de balas que Maria?**

**Juntar, Acrescentar,
Separar, Retirar...**

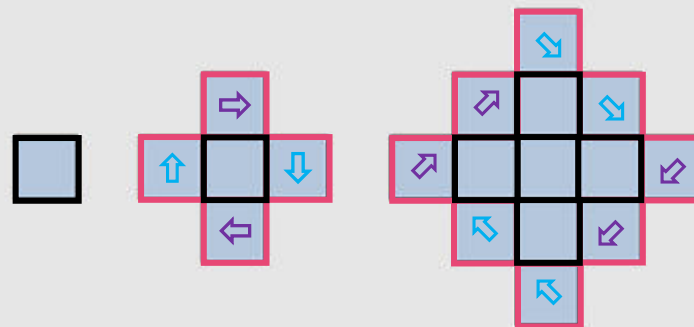
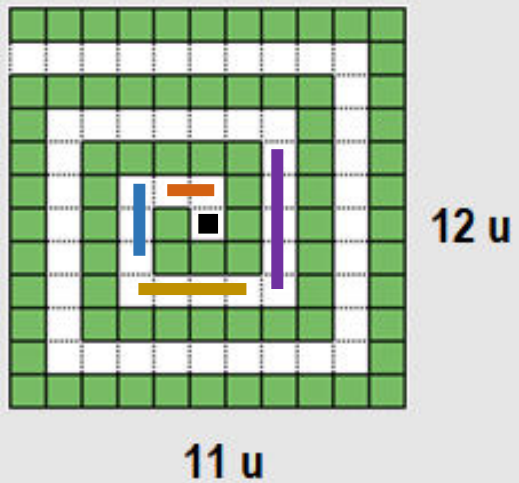


Campo Multiplicativo



Contagem...

Se você escreveu os números de 12 a 20,
quantos números você escreveu?



Recorrência...

n	n ²	Σ n ²	n!
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

	PA	PG	Fibonacci
	3	2	
a ₁	2	3	1
a ₂			1
a ₃			
a ₄			
a ₅			
a ₆			
a ₇			
a ₈			
a ₉			
a ₁₀			

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Álgebra? Nãããããão!

O salário de Vagner é 20% do salário de seu chefe. De quanto deveria ser aumentado o salário de Vagner para ficar igual ao de seu chefe?

(A) 80% (B) 120% (C) 180% (D) 400% (E) 520%

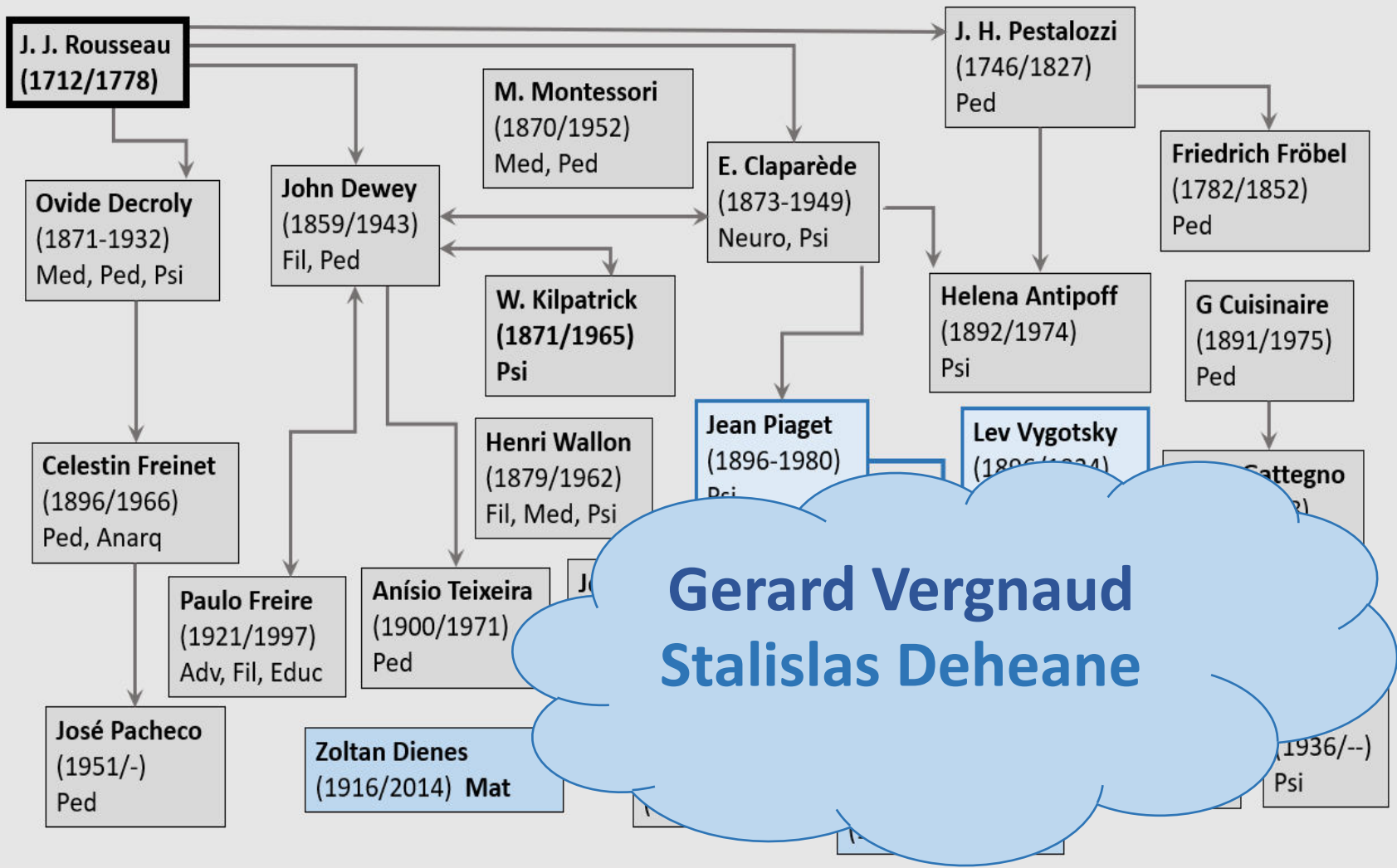
André fez seis pilhas com o mesmo número de maçãs cada uma. Boris tinha a mesma quantidade de maçãs, e as distribuiu em cinco pilhas cada. Boris percebeu que cada uma de suas pilhas tinha 2 maçãs a mais que cada uma das pilhas de André. Quantas maçãs tem André?

(A) 60 (B) 65 (C) 70 (D) 75 (E) 80

PAPMEM jan/2020

Oficinas para Ensino Fundamental

Pensadores da Educação



Teoria dos Campos Conceituais

Gerard Vergnaud

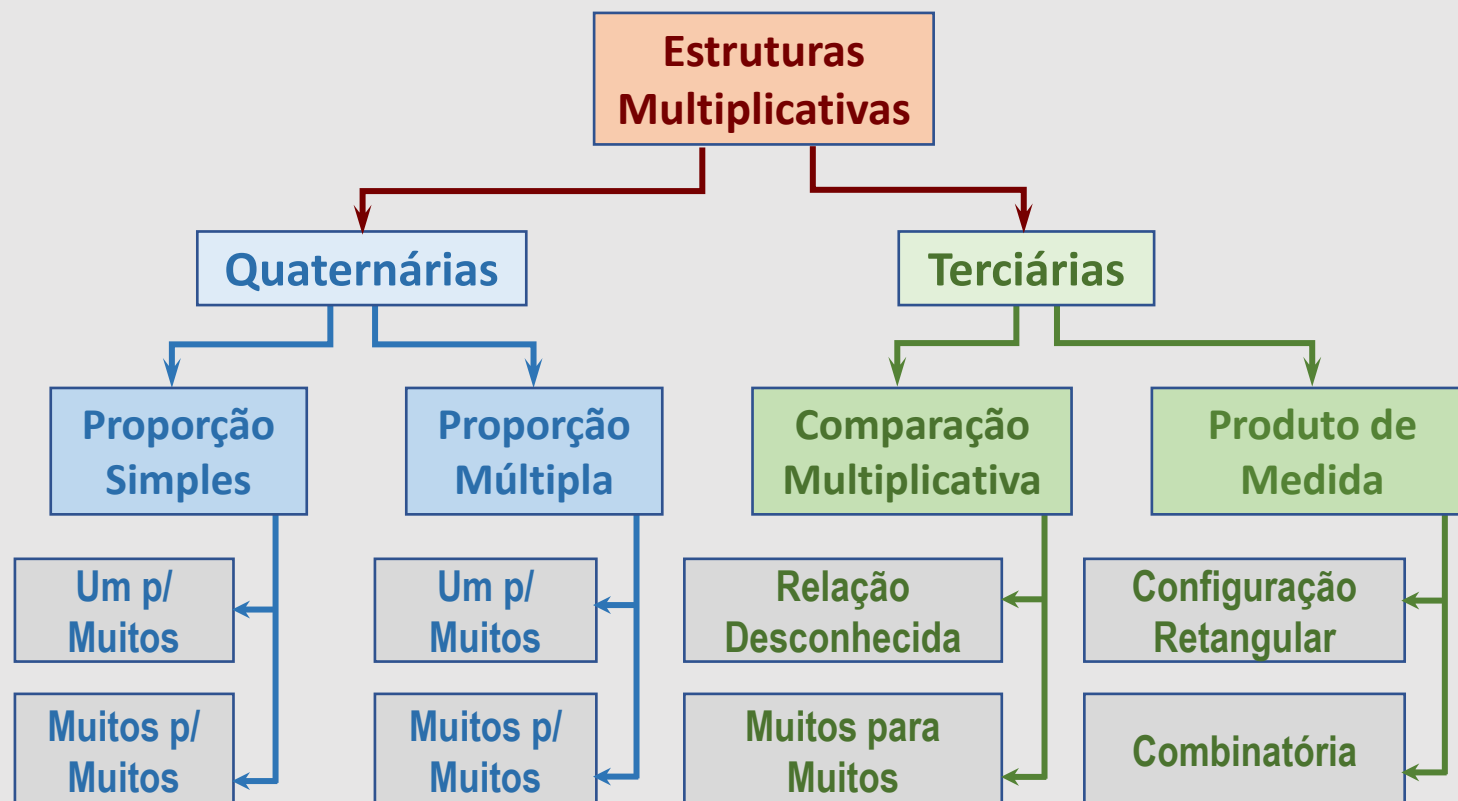
3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática

Sandra Magina, PUC/SP e UESC; Vera L. Merlini, UESC; Aparecido dos Santos, UNINOVE

A Estrutura multiplicativa sob a ótica da teoria dos campos conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem.

Campo Conceitual *Multiplicativo*

Mapeamento das Estruturas Multiplicativas



3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática

Sandra Magina, PUC/SP e UESC; Vera L. Merlini, UESC; Aparecido dos Santos, UNINOVE

A Estrutura multiplicativa sob a ótica da teoria dos campos conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem

BNCC

**Competências Específicas
da Matemática**

BNCC - Competências Específicas de Matemática

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, **Modelagem da Natureza e Humanas**, das questões socioecon. ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, **contribuindo para uma formação geral.**

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e **tomar decisões éticas e socialmente responsáveis**, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situação de vulnerabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, **mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.**

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diferentes contextos, avaliando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros matemáticos (**Semiótica** algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando diferentes procedimentos, identificando a necessidade, **Demonstrações...** ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Contextos Aditivos e Multiplicativos

- **Fração – Porcentagem**
- **Razão – Taxa – Índices**
- **Juros (A & M)**
- **Proporção – Regra de Três**
- • **Média Geométrica [MA]**
- • **Progressão Geométrica [PA]**
- • **Ordem de Grandeza**
- **Semelhança**
- **Homotetia**
- **Medida**
- • **Área e Volume (A & M)**
- • **Função Exp. [Reta] (A & M)**
- **Contagem (A & M)**
- **Probabilidade (A & M)**

Pontapé inicial escolhido:
Médias

Etimologia: Média

- Uso substantivo do adjetivo do latim antigo medianus: "de ou que está no meio";
- Do latim medius: "no meio";
- Do francês antigo meien: "meio, intermediário";
- Raiz proto-indo-européia: medhyo: algo fisicamente entre dois extremos;
- **Século XIII**: ponto, lugar ou estado que está a meio caminho entre os extremos;
- Na música, "um tom intermediário entre dois outros tons";

Etimologia: Average

800AC (Ilha grega de Rodes):

A Lei Geral da Média (das 'Perdas') permite que os carregadores alijem mercadorias aleatórias de um navio em uma emergência e que, legalmente, todos os que enviam mercadorias no mesmo navio devem **compartilhar o custo dessa perda** em **uma divisão proporcional ao valor das respectivas mercadorias transportadas**.

Século XII – Comércio marítimo do Mediterrâneo

Averia: **culpa** (espanhol);

Avarij: **acidente** (holandês);

Haferei: **dano, destruição** (alemão)

Awariya: **mercadoria danificada** (árabe);

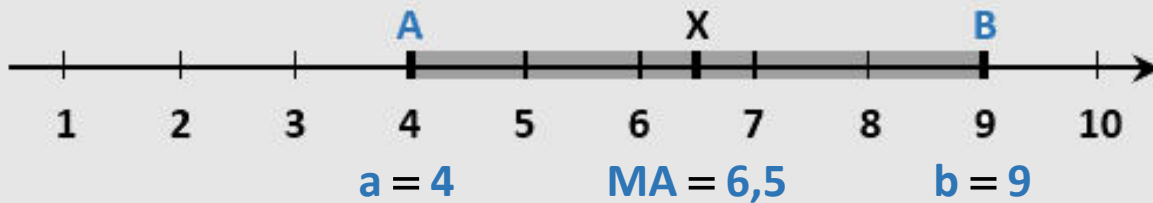
https://www.reddit.com/r/etymology/comments/6s39ui/the_origin_of_the_english_word_average_comes_from/

<https://www.etymonline.com>

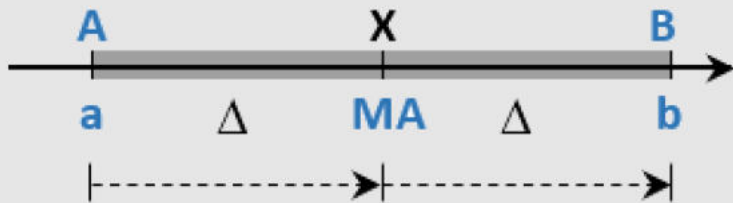
<https://en.wikipedia.org/wiki>

Primeira média: **aditiva!**

Média aritmética: entre 4 e 9



Desvios aditivos entre a e MA e entre MA e b



$$\Delta = MA - a = b - MA \Rightarrow MA = \frac{a + b}{2}$$

Desvios aditivos de a e b c/ relação a x

$$\left. \begin{array}{l} x - a \\ x - b \end{array} \right\} (x - a) + (x - b) = 0 \Rightarrow x = \frac{a + b}{2}$$

Quem **igual** a 0 (neutro da adição) a soma dos desvios **aditivos** é a **MA**...

Propriedades (*)

- A **MA** é um valor intermediário: $x_{\min} \leq \text{Média} \leq x_{\max}$;
- A **MA** é influenciada por todos os valores, pois $\text{Média} = (\sum X_i)/n$, onde **n** é a quantidade de dados;
- A **MA** **não necessariamente** coincide com um dos valores que a compõem;
- A **MA** pode ser um número que **não tem** um correspondente na **realidade física**;
- **Soma dos Desvios Aditivos** com relação à **MA** é zero, ou seja, $\sum(\text{média} - x_i) = 0$;
- A **MA** é um **valor representativo** dos dados a partir dos quais ela foi calculada;
- A **Média Aritmética** é o valor que *minimiza* a **soma dos Desvios Quadráticos**

Min $[(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2]$ ocorre para $x = \text{MA}$

$$x_{\min} = -b/2a$$

Outra Média: **multiplicativa!**

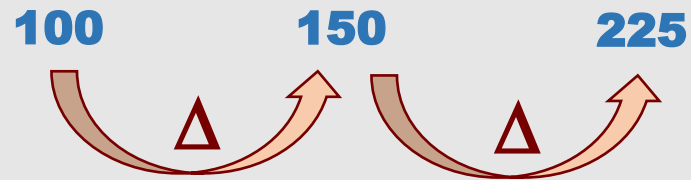
Admita que, em um experimento, você tenha **100 bactérias** em uma *lâmina*, analisada com um microscópio. **Decorrida uma hora**, você repete a contagem (com o microscópio) e contabiliza um total de **150 bactérias!** Um *acréscimo* de **50 novas bactérias**.

Analise os dois argumentos que se seguem:

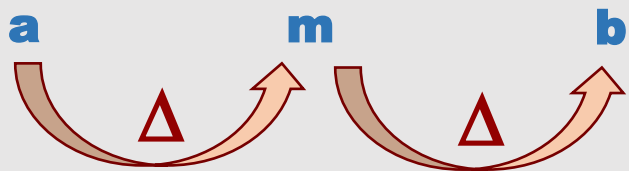
- a) Devemos esperar um novo aumento de **50** bactérias na próxima hora, mantendo o mesmo **crescimento**; assim, após **duas horas** haverá $150 + 50 = 200$ bactérias.
- b) Em uma hora houve um aumento equivalente a **50 bactérias** a partir de **100 bactérias originais**, correspondentes a **50% de crescimento** em relação à **quantidade original** ($\times 1,5$). Então é esperado um novo aumento de **50%**, ou seja, **50%** de **150** bactérias, durante **a hora adicional**, totalizando, **nas duas horas**, $150 + 75 = 225$ bactérias.

Média Multiplicativa

150 está *multiplicativamente* entre **100** e **225**?



Desvio multiplicativo!



Desvios iguais!

$$\frac{m}{a} = \frac{b}{m} \Rightarrow m^2 = ab \Rightarrow \boxed{m = \sqrt{ab}} \Rightarrow \mathbf{MG}$$

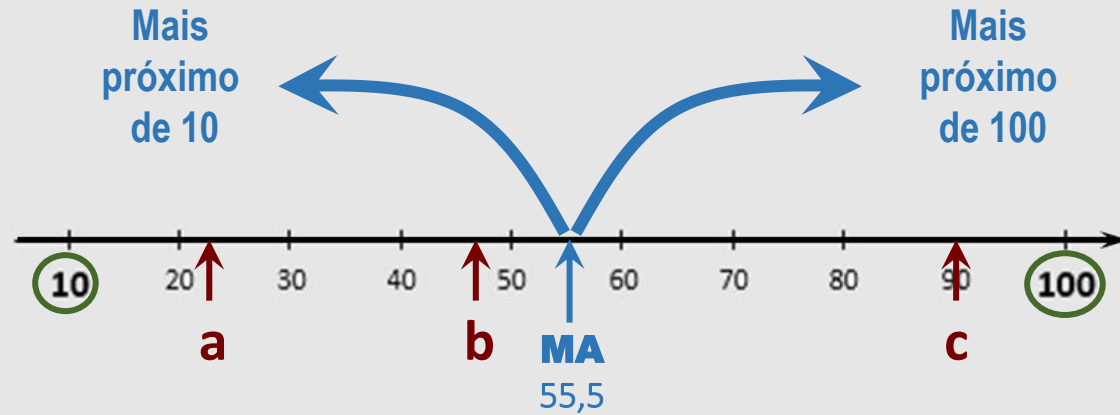
Desvios multiplicativos de **a** e **b**
c/ relação a **x**

$$\frac{x}{a} \times \frac{x}{b} = 1$$

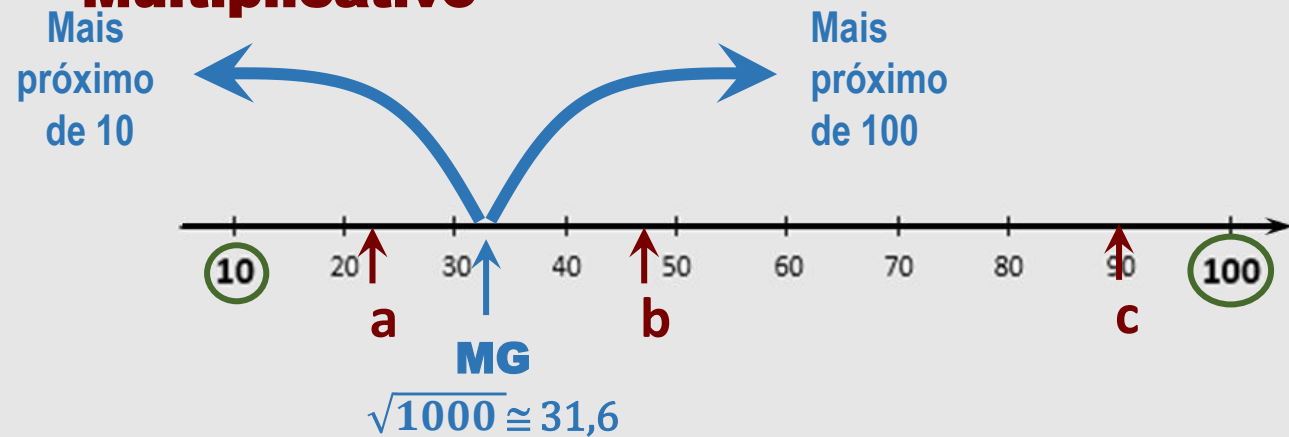
Quem **igualava** ao neutro o produto dos desvios **multiplicativos** é a **MG**...

Estar mais perto ... aditiva ou multiplicativamente?

Aditivo

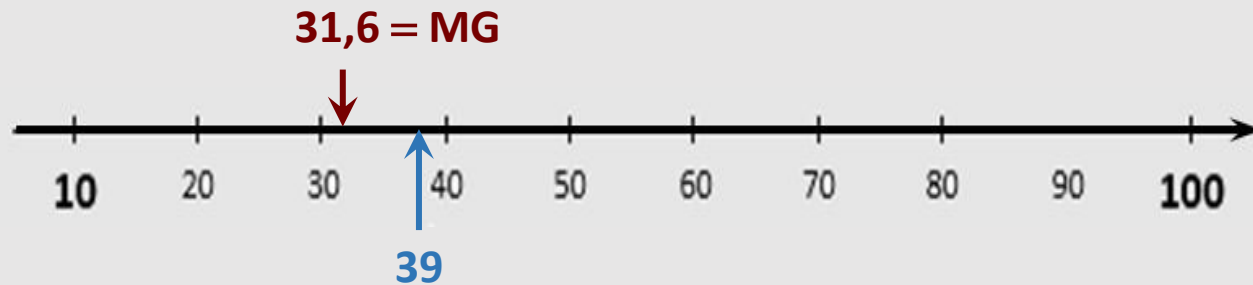


Multiplicativo



Aplicação – Ordem de grandeza

Qual a ordem de grandeza de 39?

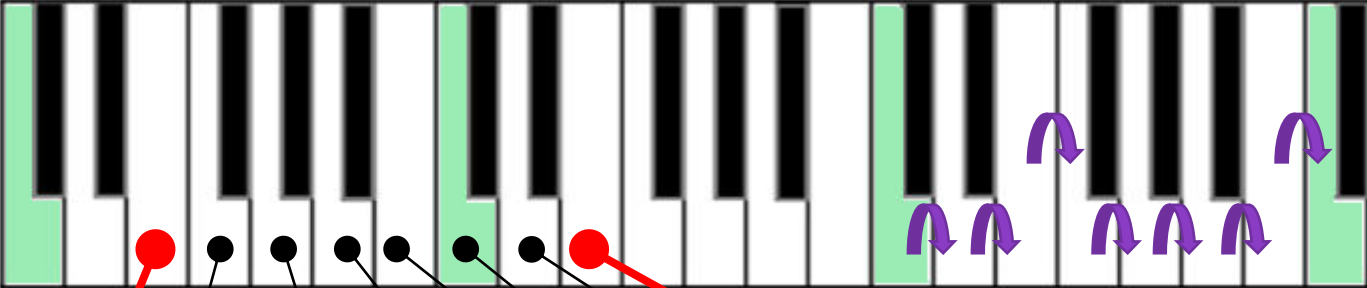


Valor	Notação Científica	Potência anterior	Potência posterior
39	$3,9 \times 10^1$	1×10^1	$10 \times 10^1 = 10^2$
1,25	$1,25 \times 10^0$	1×10^0	$10 \times 10^0 = 10^1$
0,031	$3,1 \times 10^{-2}$	1×10^{-2}	$10 \times 10^{-2} = 10^{-1}$
20	2×10^1	1×10^1	$10 \times 10^1 = 10^2$

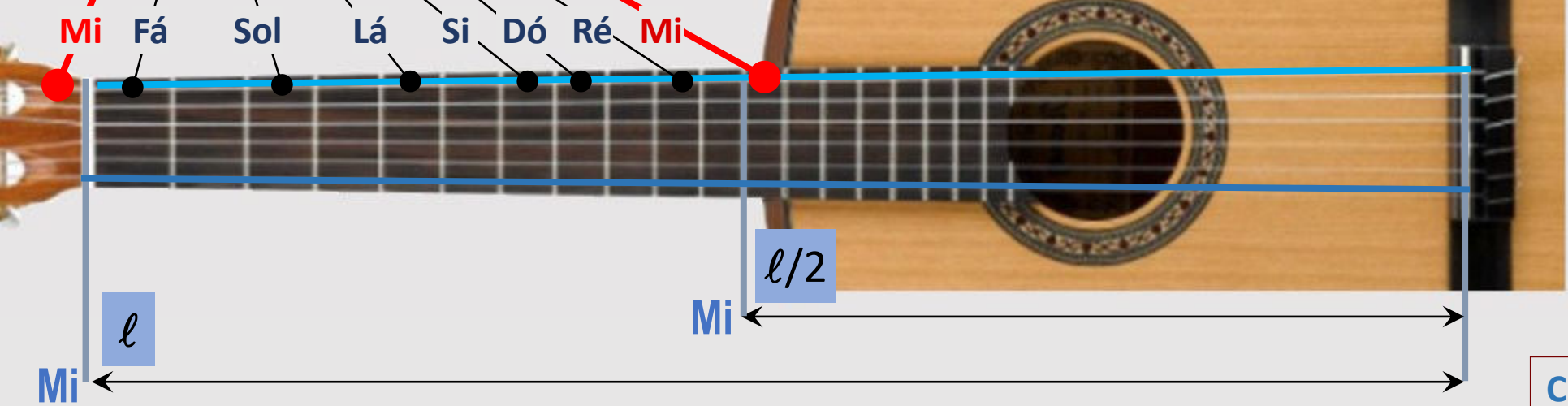
$$\sqrt{10^1 \times 10^2} = 10^{\frac{1+2}{2}} = 10\sqrt{10} \cong 31,6$$

Aplicação - Altura de uma nota

Dó Ré Mi Fá Sol Lá Si
#



Dó Ré Mi Fá Sol Lá Si



$$\underbrace{\Lambda \times \Lambda \times \dots \times \Lambda}_{12} = \Lambda^{12} = 2 \Rightarrow \Lambda = \sqrt[12]{2} = 1,059463 \text{ (1 semiton)}$$

Curiosidade: Dó \Rightarrow Sol
 $\Lambda^7 = 1,4983$ (temperada)
 $\cong 3/2$ (Pitagórica)

Comportamento Aditivo e Multiplicativo

Desejamos analisar uma **grandeza y**, cujo valor depende do valor de outra **grandeza x**...

$$y = f(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} x \text{ é a variável independente e} \\ y \text{ é a variável dependente} \end{array} \right.$$

Como se dá a **variação** de **y** frente à **variação** de **x**?

Se **x** variar de **1** em **1 unidade**, como se dá a variação de **y**?

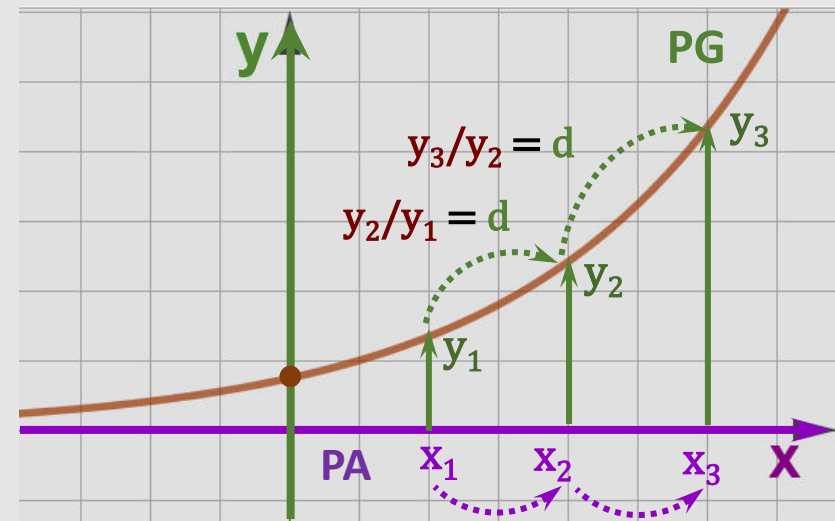
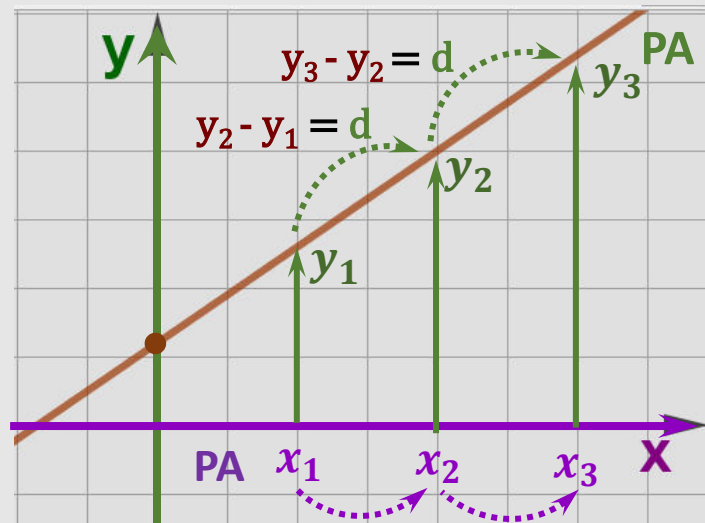
Exemplos

- se **y** é a **distância** percorrida por um automóvel com velocidade constante e **x** é a **variável tempo**, como se dá a **variação de y** se **x varia** de **1** em **1 unidade**?
- se **y** é a **quantidade de bactérias** em uma lâmina de um microscópio, e **x** é a **variável tempo**, como se dá a **variação de y** se **x varia** de **1** em **1 unidade**?

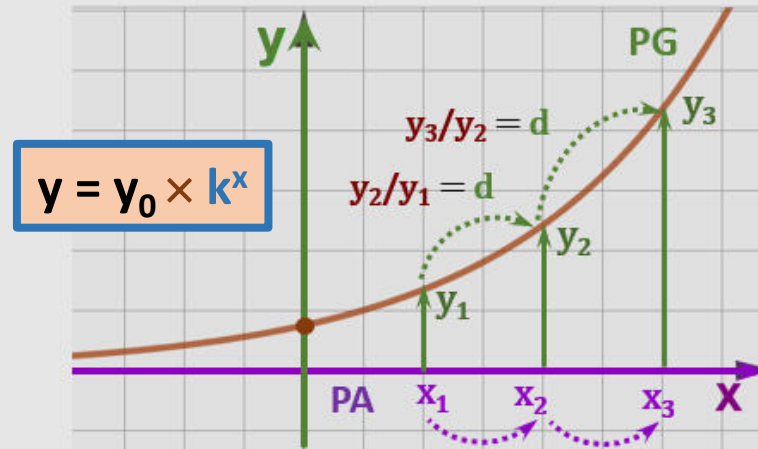
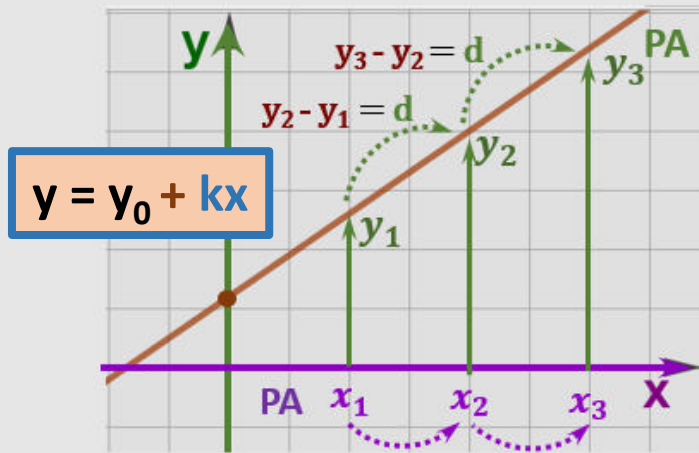
Comportamento Aditivo e Multiplicativo

- se y é a **distância** percorrida por um carro com velocidade constante e x é a **variável tempo**, como se dá a **variação de y** se x varia de **1 em 1 unidade**?
- se y é a **quantidade de bactérias** em uma lâmina de um microscópio, e x é a **variável tempo**, como se dá a **variação de y** se x varia de **1 em 1 unidade**?

Tabelas ! \Rightarrow



Campos Aditivo e Multiplicativo × BNCC



104 – taxas e índices (espaciais)

EM13MAT510 - Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de **duas variáveis numéricas**, levar em conta a variação e **utilizar uma reta** para descrever a relação observada.

2 problemas.

representação e de **função polinomial de 1º grau**.

303 – cresc. linear ou exp. (juros)

309 – áreas e volumes de prismas

313 – notação científica

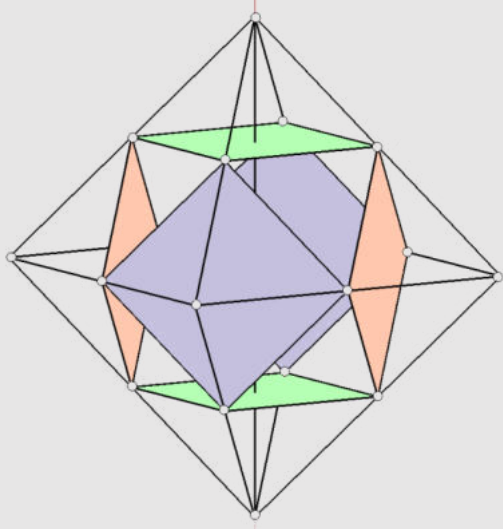
Resolver e elaborar problemas que envolvem o **as totais e de volumes de prismas**, pirâmides e **s em situações reais**.

de cada caso.

508 – PGs × Exponenciais

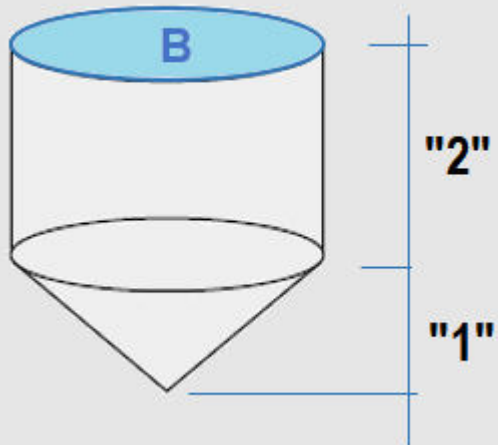
510 – Duas variáveis × retas

Campo Multiplicativo



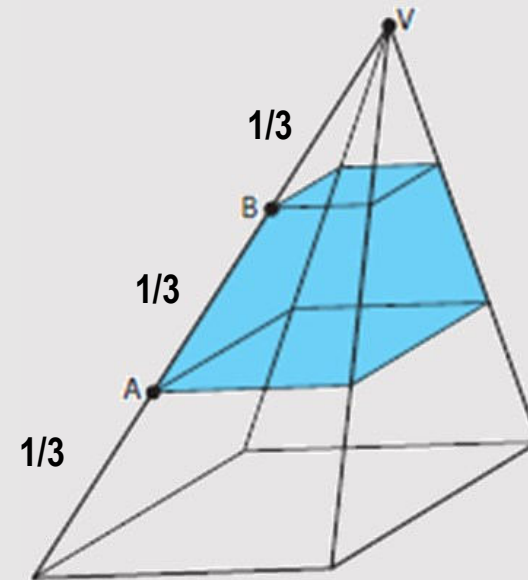
Volume?

- Ptos médios das arestas



Volume Total
Volume de grãos ?

- Volume de grãos é o dobro do vol. do cone



Volume do tronco

- altura = 9 cm
- aresta da base: 6 cm
- volume total: 108 cm³

BNCC

Habilidades

Habilidades 1nn

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para (...) consolidar sua formação geral

EM13MAT101 - Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das **taxas de variação**, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT102 - Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

EM13MAT103 - Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de **medida de diferentes grandezas** e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não SI, como as de armazenamento e veloc. de transf. de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

EM13MAT104 – Interpretar **taxas** e **índices** de natureza socio-econômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.

EM13MAT105 – Utilizar as noções de **transformações isométricas** (translação, reflexão, rotação e composições destas) e **transformações homotéticas** para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras.

EM13MAT106 - Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

Habilidades 2ⁿⁿ

Propor / participar de ações para investigar desafios do mundo contemp. e tomar decisões éticas...

EM13MAT201 - Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo **medições** e cálculos de **perímetro**, de **área**, de **volume**, de **capacidade** ou de **massa**.

EM13MAT202 - Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão, utilizando ou não recursos tecnológicos.

EM13MAT203 - Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de **juros simples** e **compostos**, entre outros), para tomar decisões.

Habilidades 3nn

Utilizar estratégias, conceitos, def. e proc. mat. para interpretar, construir modelos e resolver ...

EM13MAT301 - Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem **equações lineares** simultâneas, usando técnicas alg. e gráf.

EM13MAT302 - Construir Modelos empregando as funções **polinomiais de 1º** ou 2º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tec. digitais.

EM13MAT303 - Interpretar e comparar situações que envolvam **juros simples** com as que envolvem **juros compostos**, por meio de represent. gráf. ou análise de planilhas, destacando o **crescimento linear ou exp.** de cada caso.

EM13MAT304 - Resolver e elaborar problemas com **funções exponenciais** nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Mat. Financeira...

EM13MAT305 - Resolver e elaborar problemas com **funções logarítmicas** nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Mat. Financ...

EM13MAT306 - Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem **fenômenos periódicos reais** e comparar suas representações com as funções sen e cos...

EM13MAT307 - Empregar diferentes métodos para a obtenção da **medida da área** de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões para aplicá-las em situações reais com ou sem apoio de tec. digitais.

Habilidades 3nn

Utilizar estratégias, conceitos, def. e proc. mat. para interpretar, construir modelos e resolver ...

EM13MAT308 - Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

EM13MAT309 - Resolver e elaborar problemas que envolvem o **cálculo de áreas totais e de volumes de prismas**, pirâmides e corpos redondos em situações reais.

EM13MAT310 - Resolver e elaborar problemas de **contagem** envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos **princípios multiplicativo e aditivo**, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

EM13MAT311 - Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando **contagem** das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

EM13MAT312 - Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de prob. de eventos em exp. aleatórios sucessivos.

EM13MAT313 - Utilizar a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de alg. signif. e duvidosos, e reconhecendo que toda medida possui erro.

EM13MAT314 - Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela **razão ou pelo produto de** outras (veloc., dens. demográfica, energia elétrica etc.).

EM13MAT315 - Investigar e registrar, por meio de um fluxograma um algoritmo que resolve um problema.

Habilidades 3ⁿⁿ

Utilizar estratégias, conceitos, def .e proc. mat. para interpretar, construir modelos e resolver ...

EM13MAT315 - Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

EM13MAT316 - Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio-padrão).

EM13MAT317 - Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando **contagem das possibilidades**, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

Habilidades 4ⁿⁿ

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de represent. mat....

EM13MAT401 - Converter representações algébricas de **funções polinomiais de 1º grau** em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é **proporcional**, recorrendo ou não a softwares.

EM13MAT402 - Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em represent. geométricas no plano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra.

EM13MAT403 - Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções **exponencial** e logarítmica...

EM13MAT404 - Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imp.Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas represent. algébrica e gráfica, ...

EM13MAT405 - Utilizar conceitos iniciais de uma LP na implementação de algorit. em linguagem corrente e/ou matemática.

EM13MAT406 - Construir e interpretar tabelas e gráficos de freq. com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares.

EM13MAT407 - Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos, reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

Habilidades 5nn

Investigar propriedades mat., ... identificando a necessidade de uma demonstração mais formal ...

EM13MAT501 - Investigar relações entre números expressos em **tabelas** para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de **função polinomial de 1º grau**.

EM13MAT502 - Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar reconhecendo quando essa representação for do tipo $y = ax^2$.

EM13MAT503 - Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Mat. Financ. ou Cinemática, com apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT504 - Investigar processos de obtenção da **medida do volume** de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o **princípio de Cavalieri**, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

EM13MAT505 - Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

EM13MAT506 - Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

Habilidades 5ⁿⁿ

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de represent. matemática

EM13MAT507 - Identificar e associar **progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos**, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

EM13MAT508 - Identificar e associar **progressões geométricas (PG) a funções exponenciais** de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

EM13MAT509 - Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes **projeções** usadas em **cartografia (como a cilíndrica e a cônica)**, com ou sem suporte de tecnologia digital.

EM13MAT510 - Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de **duas variáveis numéricas**, ... levar em conta a variação e **utilizar uma reta** para descrever a relação observada.

EM13MAT511 - Reconhecer a existência de **diferentes tipos de espaços amostrais**, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

