APROXIMAÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS

Motivação

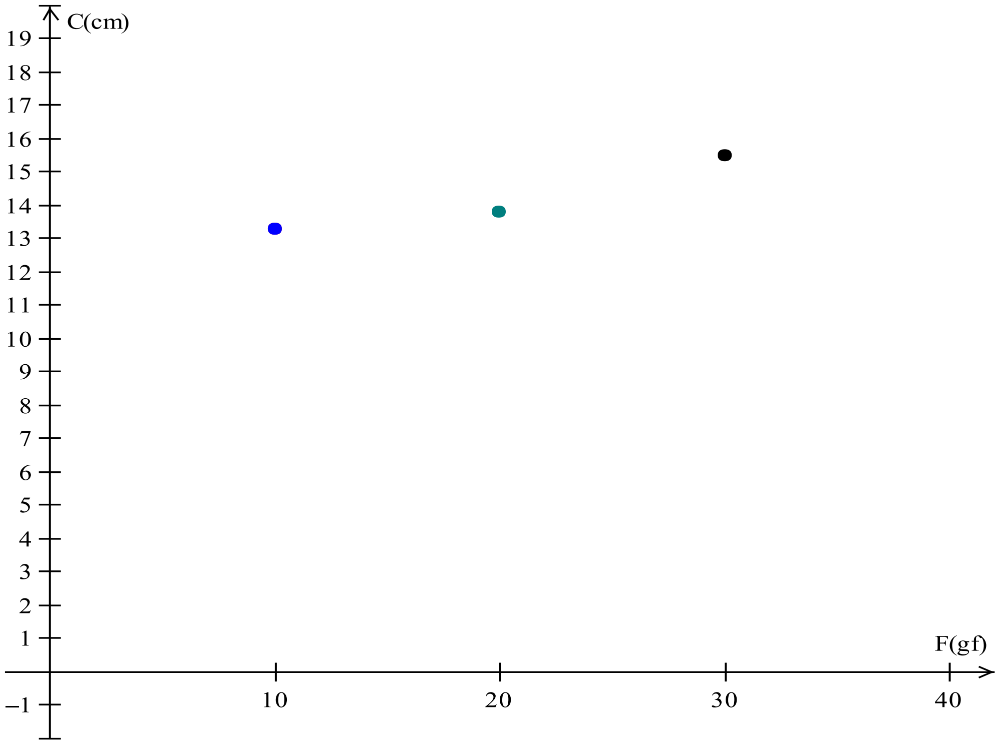
A Lei de Hooke diz que o comprimento C de uma mola em função da força F aplicada sobre ela é dado por $C = c_0 + kF$, onde c_0 e k são constantes, sendo c_0 o comprimento natural da mola e k a constante de elasticidade da mesma.

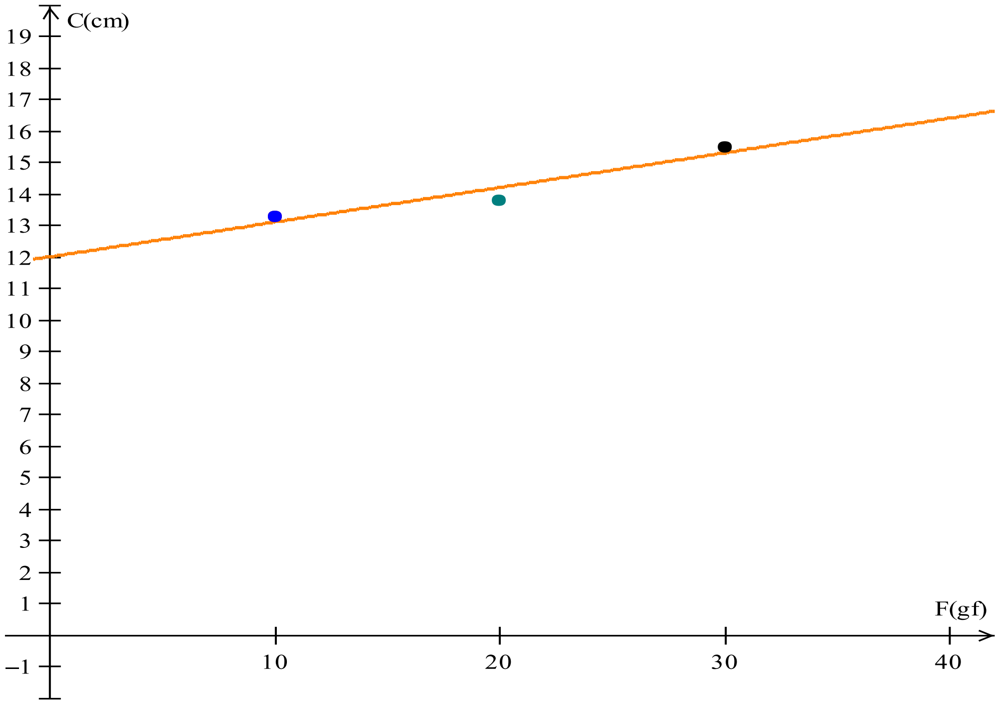
A tabela a seguir mostra medidas obtidas empiricamente para uma determinada mola:

F (gf)	10	20	30
C (cm)	13,3	13,8	15,5

Qual o comprimento natural da mola?

Qual o comprimento da mola quando aplicarmos sobre ela uma força de 40gf?





Pré-requisitos:

1. **Vetores em R[n]**

Produto escalar: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, define-se:

$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$

Ortogonalidade: os vetores *x* e *y* são ortogonais se, e somente se, $x \cdot y = 0$

Norma (comprimento) de um vetor: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, define-se

$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

Distância entre vetores: Dados $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, define-se

$d(x, y) = \|x - y\|$.

2. Matrizes

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ m \text{ linhas e } n \text{ colunas}$$

Notação: representaremos por A_i a linha *i* da matriz *A*
representaremos por a_j a coluna *j* da matriz *A*

Exemplo: $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Nesse caso: $A_1 = [1 \quad -2 \quad 3]$, $A_2 = [0 \quad 1 \quad -1]$, $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Matriz Transposta: trocar ordenadamente linhas por colunas.
Notação: A^T é a transposta de *A*.

Exemplo: $A^T_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Propriedade: $(AB)^T = B^T A^T$
Produto de Matrizes: $A_{m\times n} B_{n\times p} = (AB)_{m\times p}$, onde cada elemento $(AB)_{ij} = A_i^T \cdot b_j$

Exemplo: $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, então $(AB)_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Observação: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, tem-se: $x^T y = [x \cdot y]$ que, em geral, escrevemos simplesmente $x^T y = x \cdot y$

3. Sistemas Lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}, \ m \text{ equações e } n \text{ incógnitas}$$

ou $Ax = b$, onde $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

Quando $Ax = b$ é impossível, uma solução aproximada $\bar{x}$ pelo Método dos Mínimos Quadrados deve ser tal que:

$b - A\bar{x}$ seja ortogonal a Ax, para todo x pertencente a $\mathbf{R}^n$.

Assim, para todo x pertencente a $\mathbf{R}^n$ deve-se ter:

$$(Ax)\cdot(b - A\bar{x}) = 0 \leftrightarrow (Ax)^T(b - A\bar{x}) = 0$$

$$\leftrightarrow x^T A^T (b - A\bar{x}) = 0$$

$$\leftrightarrow x \cdot (A^T(b - A\bar{x})) = 0$$

$\leftrightarrow A^T(b - A\bar{x}) = 0$, visto que o único vetor de $\mathbf{R}^n$ ortogonal a todos os vetores de $\mathbf{R}^n$ é o vetor nulo.

Logo, a solução aproximada $\bar{x}$ pelo Método dos Mínimos Quadrados é solução do sistema linear $(A^T A)\bar{x} = A^T b$, cujas equações são chamadas de Equações Normais.

4. Exercícios

1) Dados os pontos (1, 2), (2, 3) e (4, 3), ache a reta por Mínimos Quadrados que "melhor se ajuste" a esses pontos.
2) Um objeto foi arremessado para cima e a tabela a seguir mostra dados empíricos de sua altura em relação ao solo em determinados instantes de tempo após o lançamento:

Tempo(s)	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Altura(m)	10,2	17,7	20,0	23,6	19,2	18,1

a) Encontre, por Mínimos Quadrados, a curva quadrática que "melhor se ajuste" a esses dados.
b) De que altura o objeto foi lançado?
c) Qual a velocidade inicial do objeto?
d) O que representa o coeficiente do termo quadrático? O valor encontrado é razoável?