Alguns problemas olímpicos de Álgebra
Exercícios Propostos
Prof. Regis

1. (OBMEP 2018 – Nível 3 – 2ª fase) Sérgio inventou as operações matemáticas # e @ entre números inteiros, como abaixo:

• $a\#b = a^2 + b^2$
• $a@b = (a+b)^2$

Por exemplo, $1\#4 = 17$ e $1@(-6) = 25$. Utilizando as operações criadas por Sérgio, responda às perguntas abaixo:

a) Qual é o valor de $(2@3) - (2\#3)$?
b) Se $(x-5)\#(y-6) = 0$, qual é o valor de $x@y$?
c) Quantos são os pares ordenados (a, b) de números inteiros, tais que $(a@b) - (a\,\#b) = 36$?

2. (OBMEP 2017 – Nível 3 – 2ª fase) Júlia faz o seguinte cálculo com números inteiros positivos: ela escolhe um número, eleva esse número ao cubo e subtrai desse cubo o próprio número. Veja na figura que o resultado do cálculo de Júlia com o número 2 é igual a 6.

a) Qual é o resultado do cálculo de Júlia com o número 3?
b) Qual é o número que deve ser escolhido por Júlia para que o resultado do cálculo seja 1320?
c) Explique por que, para qualquer número que Júlia escolher, o resultado final do cálculo será sempre um múltiplo de 6.

3. (OBM 2009 – Nível 2 – 2ª fase) Observe:

$$(x-r)(x-s) = x^2 - (r+s)x + rs$$

Assim, substituindo x por r e por s, obtemos

$$\left|\begin{array}{l} r^2 - (r+s)r + rs = 0 \\ s^2 - (r+s)s + rs = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} a(r^{n+2} - (r+s)r^{n+1} + rs \cdot r^n) = 0 \\ b(s^{n+2} - (r+s)s^{n+1} + rs \cdot s^n) = 0 \end{array}\right.$$

Somando as duas equações e sendo $S_n = a \cdot r^n + b \cdot s^n$, verifica-se que

$$S_{n+2} = (r+s)S_{n+1} - rsS_n$$

Dados $S_1 = ar + bs = 1$, $S_2 = ar^2 + bs^2 = 2$, $S_3 = ar^3 + bs^3 = 5$ e $S_4 = ar^4 + bs^4 = 6$, determine $S_5 = ar^5 + bs^5$.

4. (OBM 2007 – Nível 2 – 2ª fase) Sejam α e β as raízes da equação quadrática $(x-2)(x-3) + (x-3)(x+1) + (x+1)(x-2) = 0$.

Determine o valor de $\dfrac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} + \dfrac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)} + \dfrac{1}{(\alpha-3)(\beta-3)}$.

5. (OBM 2011 – Nível 2 – 2ª fase) Quantos são os pares ordenados (a, b), com a e b inteiros positivos, tais que

$$a + b + mdc(a, b) = 33 \text{ ?}$$

6. (OBM 2008 – Nível 2 – 2ª fase) Encontre todos os triângulos retângulos, de lados com medidas inteiras, nos quais a área tem valor numérico igual ao do perímetro.

7. (Rússia 2012) A sequência a_1, a_2, ... é definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ e

$$a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

para todo $n \geq 2$.
Prove que a_n é inteiro para todo $n \geq 1$.