



## Congruências e aritmética módulo $n$ - Problemas

Carlos Gustavo Moreira - IMPA

**Problema 1.** Encontre os últimos 3 dígitos de  $3^{2009}$  em notação decimal.

**Problema 2.** Mostre que existem infinitos números da forma

$$20000 \dots 009$$

que são múltiplos de 2009.

**Problema 3.** Seja  $p$  um número primo ímpar e sejam  $a$  e  $b$  inteiros não divisíveis por  $p$  tais que  $p \mid a - b$ . Mostre que  $p^k \mid a^n - b^n \iff p^k \mid n(a - b)$ .

**Problema 4.** Demonstre que se  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , então todos os divisores primos ímpares de  $a^2 + b^2$  são da forma  $4k + 1$ .

**Problema 5 (IMO2003).** Seja  $p$  um número primo ímpar. Demonstre que existe um primo  $q$  tal que para todo  $n$ , o número  $n^p - p$  não é divisível por  $q$ .