Sociedade Brasileira de Matemática

DESIGUALDADES ELEMENTARES

Antonio Caminha Muniz Neto

♦ Nível Avançado.

Pretendemos neste artigo desenvolver ferramentas básicas a fim de que o leitor se torne apto a resolver uma vasta gama de problemas de competições matemáticas que envolvam desigualdades. Tentamos tornar nossa exposição a mais auto-suficiente possível. Em certas passagens, contudo, algum conhecimento de cálculo é útil, ainda que não imprescindível. Em tais ocasiões indicamos ao leitor a referência [3] como bibliografia auxiliar.

Antes de discutirmos qualquer desigualdade em especial, consideremos um exemplo preliminar.

***Exemplo* 1**: Para todo inteiro positivo n, prove que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}\geq\frac{1}{2}\left(\log_2 n+1\right)$.

Solução : Veja que, para todo inteiro $k>1$,

$$\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^k}>\underbrace{\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}\text{ vezes}}=\frac{1}{2}$$

Portanto, sendo 2^k a maior potência de 2 menor ou igual a n, temos

$$1+\frac{1}{2}+\sum_{j=3}^{n}\frac{1}{j}\geq 1+\frac{1}{2}+\sum_{j=3}^{2^k}\frac{1}{j}=1+\frac{1}{2}+\sum_{j=2}^{k}\left(\frac{1}{2^{j-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^j}\right)>1+\frac{1}{2}+\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{2}=1+\frac{k}{2}$$

Mas $2^k\leq n<2^{k+1}\Rightarrow k\leq\log_2 n<k+1\Rightarrow 1+\frac{k}{2}>\frac{1}{2}\left(\log_2 n+1\right)$, e a desigualdade do enunciado é imediata. □

O exemplo acima foi colocado de propósito. Ele chama atenção para o fato de que nem sempre precisamos de algo mais que raciocínio para resolver problemas envolvendo desigualdades. A proposição abaixo mostra um pouco mais sobre como podemos derivar desigualdades interessantes com muito pouca matemática.

Estrada Dona Castorina, 110 Rio de Janeiro - Brasil 22460-320 Fone: 55 21 2529 5000/5284 Fax: 55 21 2512 4115
http://www.impa.br

Proposição* 1 *(Desigualdade do Rearranjo): Sejam $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ reais positivos dados, e considere a expressão $S = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$, onde $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ é uma reordenação de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Então

$$a_1a_n + a_2a_{n-1} + \ldots + a_na_1 \leq S \leq a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$$

Prova : Vamos primeiro tornar S a maior possível. Como só há um número finito (n fatorial) de possíveis reordenações $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, há uma delas que torna S máxima. Suponha então que estamos com a reordenação $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ que torna S máxima.

Queremos mostrar que essa reordenação é exatamente $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Para isso, basta mostrarmos que deve ser $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$. Suponha o contrário, i.e., que existam índices $i < j$ tais que $b_i > b_j$. Trocando as posições de b_i e b_j (i.e., pondo b_i ao lado de a_j e b_j ao lado de a_i), S varia de $a_ib_j + a_jb_i - (a_ib_i + a_jb_j) = (a_i - a_j)(b_j - b_i) > 0$, quer dizer, S aumenta. Mas isso contraria o fato de ser a reordenação $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ aquela que torna S máxima. Logo, $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ e daí $b_i = a_i$ para todo i, donde o maior valor possível de S é $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$.
O raciocínio para minimizar S é análogo. □

Passemos agora a nosso principal objetivo, o estudo de desigualdades especiais. A mais importante destas é a dada pela proposição 2 abaixo. Antes, uma definição.

***Definição* 1** : Dados $n > 1$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, definimos

i. A *média aritmética* de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ como o número $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

ii. A *média geométrica* de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ como o número $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$.

Proposição* 2 *(Desigualdade Entre as Médias Aritmética e Geométrica) : Dados $n > 1$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sua média aritmética é sempre maior ou igual que a média geométrica, ocorrendo a igualdade se e só se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forem todos iguais. Em símbolos:

Estrada Dona Castorina, 110 Rio de Janeiro - Brasil 22460-320 Fone: 55 21 2529 5000/5284 Fax: 55 21 2512 4115
http://www.impa.br

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

Prova : Façamos a prova em dois passos:

i. A desigualdade é verdadeira quando n for uma potência de 2, ocorrendo a igualdade se e só se todos os números forem iguais.
ii. A desigualdade é verdadeira em geral, e a igualdade ocorre se e só se os números forem todos iguais.

i. Façamos indução sobre $k \geq 1$, sendo $n = 2^k$: Para $k = 1$, temos $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2} \Leftrightarrow a_1 - 2\sqrt{a_1a_2} + a_2 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$, o que é verdade. Há igualdade se e só se $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = 0$, i.e., se e só se $a_1 = a_2$.

Se já provamos que $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$, com igualdade se e só se $a_1 = \ldots = a_n$ para $n = 2^k$, então

$$\frac{(a_1+\ldots+a_n)+(a_{n+1}+\ldots+a_{2n})}{2n} = \frac{1}{2}\left[\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} + \frac{a_{n+1}+\ldots+a_{2n}}{n}\right] \geq \frac{\sqrt[n]{a_1\ldots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1}\ldots a_{2n}}}{2} \geq$$
$$\geq \sqrt{\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}\ \sqrt[n]{a_{n+1}\ldots a_{2n}}} = \sqrt[2n]{a_1\ldots a_na_{n+1}\ldots a_{2n}}$$

Para haver igualdade, devemos ter igualdade em todas as passagens. Então, deve ser

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}\ ,\ \frac{a_{n+1}+\ldots+a_{2n}}{n} = \sqrt[n]{a_{n+1}\ldots a_{2n}} \text{ e}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a_1\ldots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1}\ldots a_{2n}}}{2} = \sqrt[2n]{a_1\ldots a_na_{n+1}\ldots a_{2n}}$$

Para as duas primeiras igualdades, segue da hipóteses de indução que deve ser

$$a_1 = \ldots = a_n \text{ e } a_{n+1} = \ldots = a_{2n}$$

A última igualdade ocorre se e só se $\sqrt[n]{a_1\ldots a_n} = \sqrt[n]{a_{n+1}\ldots a_{2n}}$. Estas duas condições juntas implicam que devemos ter $a_1 = \ldots = a_n = a_{n+1} = \ldots = a_{2n}$. É também evidente que se os números forem todos iguais a igualdade ocorre.

Estrada Dona Castorina, 110 Rio de Janeiro - Brasil 22460-320 Fone: 55 21 2529 5000/5284 Fax: 55 21 2512 4115
http://www.impa.br

ii. Seja agora $n > 1$ um natural qualquer e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos. Tome k natural tal que $2^k > n$. Usando a desigualdade entre as médias para os 2^k números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $2^k - n$ cópias de $a = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, obtemos

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n + a + \ldots + a}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 \ldots a_n a^{2^k - n}} = \sqrt[2^k]{a^n a^{2^k - n}} = \sqrt[2^k]{a^{2^k}} = a,$$

e daí $a_1 + \ldots + a_n + (2^k - n)a \geq 2^k a$, ou ainda $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq a = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$, que era a desigualdade desejada.

Para haver igualdade, segue do item *i* que deve ser $a_1 = \ldots = a_n = a = \ldots = a$. Em particular, todos os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ devem ser iguais. É fácil ver que se esses números forem todos iguais então há igualdade. ❑

***Corolário* 2.1** : Dados $n > 1$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, temos

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2,$$

com igualdade se e só se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forem todos iguais.

Prova : Basta aplicarmos duas vezes a proposição 2 e multiplicarmos os resultados:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \quad \text{e} \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geq n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}}$$

❑

***Exemplo* 2** : (*Olimpíada Israelense*) Sejam k e n inteiros positivos, $n > 1$. Prove que

$$\frac{1}{kn} + \frac{1}{kn+1} + \ldots + \frac{1}{kn+n-1} > n\left(\sqrt[n]{\frac{k+1}{k}} - 1\right)$$

Prova : Basta ver que

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{kn+j}\right) + n = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{kn+j} + 1\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{kn+j+1}{kn+j} > n\sqrt[n]{\prod_{j=0}^{n-1} \frac{kn+j+1}{kn+j}} = n\sqrt[n]{\frac{k+1}{k}},$$

Estrada Dona Castorina, 110 Rio de Janeiro - Brasil 22460-320 Fone: 55 21 2529 5000/5284 Fax: 55 21 2512 4115
http://www.impa.br

onde aplicamos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica uma vez. Note que, como os números $\frac{kn+j+1}{kn+j}$ são dois a dois distintos, não há igualdade, razão do sinal > acima. ❑

Dentre todas as desigualdades especiais que temos oportunidade de usar em problemas de competições matemáticas, a desigualdade a seguir se constitui, juntamente com a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, num dos dois mais importantes resultados a serem guardados.

Proposição 3 (Desigualdade de Cauchy): Sejam $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ reais dados, não todos nulos ($n > 1$). Então

$$|a_1b_1 + \ldots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\ \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}$$

Além disso, teremos a igualdade se e só se os a_i e os b_i forem proporcionais, i.e., se e só se existir um real positivo λ tal que $b_i = \lambda a_i$ para todo i.

Prova : Considere o seguinte trinômio do segundo grau

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \ldots + (a_nx - b_n)^2$$

Desenvolvendo os parênteses, chegamos a

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

Por ser uma soma de quadrados, temos $f(x) \geq 0$ para todo real x, e daí deve ser $\Delta \leq 0$, i.e.,

$$4(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq 4(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

Cancelando o fator 4 e extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, chegamos na desigualdade de Cauchy. Examinemos agora a igualdade. Se houver igualdade, quer dizer, se for $\Delta = 0$, então o trinômio tem uma raiz real λ :

$$(a_1\lambda - b_1)^2 + (a_2\lambda - b_2)^2 + \ldots + (a_n\lambda - b_n)^2 = 0$$

Mas aí todos os parênteses devem ser nulos, i.e., $b_i = \lambda a_i$ para todo i. Então, havendo igualdade os a_i e b_i devem ser proporcionais. É evidente que se eles forem proporcionais a igualdade ocorre. ❑

Temos a seguir alguns corolários importantes.

Estrada Dona Castorina, 110 Rio de Janeiro - Brasil 22460-320 Fone: 55 21 2529 5000/5284 Fax: 55 21 2512 4115
http://www.impa.br

impa
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
PÁTRIA AMADA BRASIL GOVERNO FEDERAL

Corolário 3.1 (Desigualdade entre as Médias Quadrática e Aritmética) : Dados reais positivos $a_1, \ldots, a_n$, temos $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$, com igualdade se e só se $a_1 = \ldots = a_n$.

<u>Prova</u> Fazendo $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$ na desigualdade de Cauchy, obtemos

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\ \sqrt{n},$$

com igualdade se e só se existir um real positivo λ tal que $a_i = \lambda$ para todo i, quer dizer, se e só se os a_i forem todos iguais. Para obter a desigualdade do enunciado, basta dividir ambos os membros da desigualdade acima por n. □

***Corolário* 3.2** : Se $n > 1$ é inteiro e $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ são reais positivos, então

$$\left(\frac{a_1}{b_1} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}\right)\left(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n\right) \geq \left(a_1 + \ldots + a_n\right)^2,$$

com igualdade se e só se $b_1 = \ldots = b_n$.

<u>Prova</u> : Faça $x_i = \sqrt{\frac{a_i}{b_i}}$, $y_i = \sqrt{a_i b_i}$ e aplique a desigualdade de Cauchy para os números $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. □

***Exemplo* 3** : (*Teste de Seleção da Romênia para IMO*) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ reais positivos tais que $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_{n+1}$. Prove que

$$\sqrt{x_1(x_{n+1}-x_1)} + \ldots + \sqrt{x_n(x_{n+1}-x_n)} \leq \sqrt{x_{n+1}(x_{n+1}-x_1) + \ldots + x_{n+1}(x_{n+1}-x_n)}$$

<u>Prova</u> : Para $1 \leq j \leq n$, seja $y_j = x_{n+1} - x_j$. Pela desigualdade de Cauchy temos

$$\sqrt{x_1 y_1} + \ldots + \sqrt{x_n y_n} \leq \sqrt{x_1 + \ldots + x_n}\sqrt{y_1 + \ldots + y_n} =$$

$$= \sqrt{x_{n+1}}\sqrt{(x_{n+1}-x_1) + \ldots + (x_{n+1}-x_n)}$$ □

Estrada Dona Castorina, 110 Rio de Janeiro - Brasil 22460-320 Fone: 55 21 2529 5000/5284 Fax: 55 21 2512 4115
http://www.impa.br

Temos mais duas desigualdades importantes.

Proposição 4 (Chebychev): Sejam $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ reais, com $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ e $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$. Então

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\right) \le \frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n},$$

com igualdade se e só se $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ ou $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.

Prova :

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n} - \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[n\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right) - \left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\left(b_1+b_2+\ldots+b_n\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}(a_i-a_j)(b_i-b_j) \ge 0,$$

já que os a_i, b_i são igualmente ordenados.

Note que a condição do enunciado é suficiente para haver igualdade. Por outro lado, suponha que tenhamos a igualdade. Como $(a_i-a_j)(b_i-b_j) \ge 0$ para todos i, j, devemos ter $(a_i-a_j)(b_i-b_j) = 0$ para todos os i, j. Suponha que existisse um índice k com $b_k < b_{k+1}$. Então $b_1 \le \ldots \le b_k < b_{k+1} \le \ldots \le b_n$, e de $(a_i-a_{k+1})(b_i-b_{k+1}) = 0$ segue que $a_i = a_{k+1}$ para $i \le k$. Portanto $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = a_{k+1}$. De $(a_i-a_k)(b_i-b_k) = 0$ e $i > k$ concluímos que $a_{k+1} = \ldots = a_n$. Logo, todos os a_i devem ser iguais. □

***Corolário* 4.1** : Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos e k um natural. Então

$$\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n} \ge \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^k,$$

com igualdade se e só se todos os a_i forem iguais ou $k \in \{0, 1\}$.

Estrada Dona Castorina, 110 Rio de Janeiro - Brasil 22460-320 Fone: 55 21 2529 5000/5284 Fax: 55 21 2512 4115
http://www.impa.br

Prova : Por indução, o resultado acima é trivialmente verdadeiro para $k = 1$. Suponha $k > 1$ e o resultado válido para k - 1. Como ambos os membros da desigualdade acima são invariantes por permutações dos índices 1, 2, ..., n, podemos supor sem perda de generalidade que $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$. Daí, $a_1^{k-1} \le a_2^{k-1} \le \ldots \le a_n^{k-1}$, e da desigualdade de Chebychev obtemos $\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n} \ge \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)\left(\frac{a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + \ldots + a_n^{k-1}}{n}\right)$.

Pela hipótese de indução, vem que $\frac{a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + \ldots + a_n^{k-1}}{n} \ge \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^{k-1}$.

Combinando as duas desigualdades acima segue o resultado. A condição de igualdade é óbvia a partir da desigualdade de Chebychev. ❑

Por fim, vejamos algo um pouco mais sofisticado.

Definição 2 : Seja I um intervalo da reta e $f: I \to R$ uma função. A função f é dita

i. Convexa se $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$ para todos os x, y em I.

ii. Côncava se $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \ge \frac{f(x)+f(y)}{2}$ para todos os x, y em I.

Nas aplicações, quase sempre lidamos com funções contínuas (se você não sabe o que vem a ser uma função contínua, pense na mesma como uma função cujo gráfico *não sofre interrupções ou saltos* ao longo de seu domínio). Se f for contínua a proposição a seguir é geometricamente evidente. A partir de agora, sempre que nos referirmos a uma função estaremos sempre supondo ser seu domínio um intervalo da reta e a função contínua nesse intervalo.

Proposição 5 : Sejam $f: I \to \mathbb{R}$ uma função. Então:

i. f é convexa se e só se, para todos x, y em I e todo $t \in [0,1]$ tivermos

$$f\big((1-t)x + ty\big) \le (1-t)f(x) + tf(y)$$

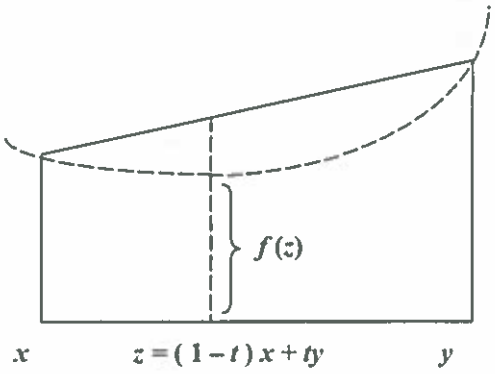
ii. f é convexa se e só se, para todos x, y em I e todo $t \in [0,1]$ tivermos

$$f\big((1-t)x + ty\big) \ge (1-t)f(x) + tf(y)$$

Façamos o caso em que f é convexa. O outro caso é análogo. Observe que $(1-t)x + ty \in [x, y] \subseteq I$, e que, no trapézio abaixo, $(1-t)f(x) + tf(y)$

Estrada Dona Castorina, 110 Rio de Janeiro - Brasil 22460-320 Fone: 55 21 2529 5000/5284 Fax: 55 21 2512 4115
http://www.impa.br

é o comprimento da paralela às bases pelo ponto $(1-t)x+ty$



Prova : Suponha primeiro que f satisfaz a condição do item i. Tomando $t=\frac{1}{2}$ concluímos que f é convexa. Reciprocamente, suponha que f seja convexa. Dados x, y em I, temos

$$f\left(\frac{x+3y}{4}\right)=f\left(\frac{\frac{x+y}{2}+y}{2}\right)\leq\frac{f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f(y)}{2}\leq\frac{\frac{f(x)+f(y)}{2}+f(y)}{2}=\frac{1}{4}f(x)+\frac{3}{4}f(y)$$ Tro

cando x por y e raciocinando como acima segue que, para

$$t\in\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right\},$$

$$f((1-t)x+ty)\leq(1-t)f(x)+tf(y) \quad (*)$$

Por indução sobre k inteiro positivo podemos concluir de maneira análoga que (*) continua válida para todo t da forma $\frac{m}{2^k}$, onde $0\leq m\leq 2^k$ é inteiro. Como todo real em [0,1] é limite de uma seqüência de números dessa forma, segue que (*) continua válida para todo t em [0, 1]. □

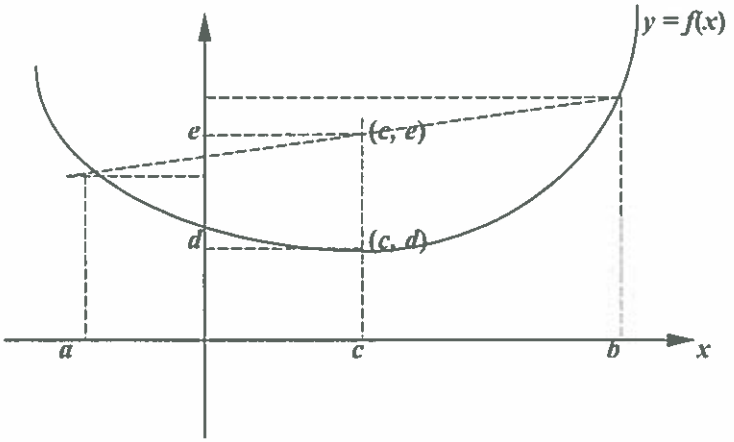
As afirmações a seguir são agora bastante evidentes, e vão ser nosso principal guia quando quisermos decidir se uma dada função é ou não convexa ou côncava.

Estrada Dona Castorina, 110 Rio de Janeiro - Brasil 22460-320 Fone: 55 21 2529 5000/5284 Fax: 55 21 2512 4115
http://www.impa.br

i. Se para todos $a < b$ em I o gráfico de f entre as retas $x = a$ e $x = b$ estiver abaixo da reta que passa por $(a, f(a)), (b, f(b))$, então f é convexa, e reciprocamente.

ii. Se para todos $a < b$ em I o gráfico de f entre as retas $x = a$ e $x = b$ estiver acima da reta que passa por $(a, f(a)), (b, f(b))$, então f é côncava, e reciprocamente.

A figura abaixo para se convencer da validez desse resultado no caso em que f é convexa.



Nele, $c = \frac{a+b}{2}$. É evidente que $d = f(c) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ e $e = \frac{f(a)+f(b)}{2}$. Daí, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$ e f é convexa.

Para nós, a importância dessa discussão sobre funções côncavas e convexas reside na seguinte:

Proposição 6 (Desigualdade de Jensen): Sejam I um intervalo da reta e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função. Se $x_1, \ldots, x_n \in I$ e $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$, com $t_1 + \ldots + t_n = 1$, então $t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n \in I$ e

Estrada Dona Castorina, 110 Rio de Janeiro - Brasil 22460-320 Fone: 55 21 2529 5000/5284 Fax: 55 21 2512 4115
http://www.impa.br

i. f convexa $\Rightarrow f(t_1x_1+\ldots+t_nx_n)\le t_1f(x_1)+\ldots+t_nf(x_n)$

ii. f côncava $\Rightarrow f(t_1x_1+\ldots+t_nx_n)\ge t_1f(x_1)+\ldots+t_nf(x_n)$

Prova : Façamos a prova, por indução sobre $n > 1$, para o caso em que f é convexa, sendo o outro caso análogo. O caso $n = 2$ é nossa hipótese. Suponha agora que para um certo $n > 1$ e todos $x_1,\ldots,x_n \in I$ e $t_1,\ldots,t_n \in [0,1]$, com $t_1+\ldots+t_n=1$, tenhamos

$$t_1x_1+\ldots+t_nx_n \in I \quad \text{e} \quad f(t_1x_1+\ldots+t_nx_n)\le t_1f(x_1)+\ldots+t_nf(x_n)$$

Considere agora $x_1,\ldots,x_{n+1}\in I$ e $t_1,\ldots,t_{n+1}\in[0,1]$, com $t_1+\ldots+t_{n+1}=1$. Se $t_{n+1}=1$ então $t_1=\ldots=t_n=0$ e nada há a fazer. Senão, defina

$$y=\frac{t_1x_1+\ldots+t_nx_n}{1-t_{n+1}}=s_1x_1+\ldots+s_nx_n,$$

onde $s_j=\frac{t_j}{1-t_{n+1}}$. Como $s_1+\ldots+s_n=1$, segue da hipótese de indução que $y\in I$. Daí,

$$f(t_1x_1+\ldots+t_{n+1}x_{n+1})=f\left((1-t_{n+1})\left(\frac{t_1x_1+\ldots+t_nx_n}{1-t_{n+1}}\right)+t_{n+1}x_{n+1}\right)=$$

$$=f\left((1-t_{n+1})y+t_{n+1}x_{n+1}\right)\le(1-t_{n+1})f(y)+t_{n+1}f(x_{n+1}),$$

já que f é convexa. Aplicando a outra metade da hipótese de indução, obtemos

$$f(y)=f(s_1x_1+\ldots+s_nx_n)\le s_1f(x_1)+\ldots+s_nf(x_n)=\frac{t_1}{1-t_{n+1}}f(x_1)+\ldots+\frac{t_n}{1-t_{n+1}}f(x_n)$$

Juntando essas duas desigualdades, obtemos a desigualdade de Jensen. □
Vejamos agora um exemplo de como aplicar a desigualdade de Jensen.

***Exemplo* 5**: (*Olimpíada Balcânica*) Sejam $n > 1$ e $a_1,\ldots,a_n$ reais positivos com soma 1. Para cada i, seja $b_i=\sum_{j=1,\,j\ne1}^{n}a_j$. Prove que

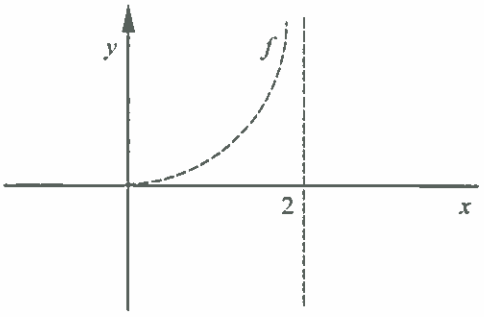
$$\frac{a_1}{1+b_1}+\frac{a_2}{1+b_2}+\ldots+\frac{a_n}{1+b_n}\ge\frac{n}{2n-1}.$$

Estrada Dona Castorina, 110 Rio de Janeiro - Brasil 22460-320 Fone: 55 21 2529 5000/5284 Fax: 55 21 2512 4115
http://www.impa.br

Prova : Veja que $b_j = 1 + \left(1 - a_j\right) = 2 - a_j$, e então temos de provar que

$$\frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \ldots + \frac{a_n}{2-a_n} \geq \frac{n}{2n-1}$$

Afirmamos que a função $f:(-\infty,2)\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{2-x}$ é convexa. Para ver isso, basta escrever $f(x) = \frac{2}{2-x} - 1$, e esboçar o gráfico de f, como abaixo.



Portanto, temos pela desigualdade de Jensen que

$$\sum_{j=1}^{n} f\left(a_j\right) \geq n\, f\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2n-1} \quad \square$$

Exemplo 6 : Utilizando a função logaritmo natural e a desigualdade de Jensen, vamos dar outra prova da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Prova : Sejam $a_1,\ldots,a_n$ reais positivos. Existem reais $x_1,\ldots,x_n$ tais que $a_j = \ln x_j$ para todo j. Como $f(x) = \ln x$ é uma função côncava, vem que

$$\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right),$$

ou seja,

$$\ln \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \ln\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)$$

Estrada Dona Castorina, 110 Rio de Janeiro - Brasil 22460-320 Fone: 55 21 2529 5000/5284 Fax: 55 21 2512 4115
http://www.impa.br

impa
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
PÁTRIA AMADA BRASIL GOVERNO FEDERAL

Como f é crescente, chegamos ao resultado desejado. ❑

Vale notar, para quem tem familiaridade com derivadas, que é possível provar que, se f'' existe, então f é convexa se e só se $f''(x) \geq 0$ para todo x em I e f é côncava se e só se $f''(x) \leq 0$ para todo x em I.

Finalizamos este artigo com alguns problemas onde procuramos oferecer oportunidade de exercitar o que foi aprendido no texto, além de desenvolver um pouco mais a teoria. É bom salientar que em alguns deles mais de uma desigualdade pode ser usada.

Problemas onde não precisamos das desigualdades acima, mas de criatividade

1. (*Olimpíada Americana*): Prove que, para todos a, b, c reais positivos, temos

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$$

2. (*Desigualdade de Abel*): Sejam $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ reais dados ($n > 1$), com $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$. Se M e m são respectivamente o máximo e o mínimo do conjunto $\{b_1, b_1+b_2, \ldots, b_1+\ldots+b_n\}$, prove que

$$ma_1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq Ma_1,$$

com igualdade se e só se $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

3. (*Teste de Seleção de Singapura para IMO*): Prove que, quaisquer que sejam os reais positivos a, b e c, tem-se

$$c\sqrt{a^2-ab+b^2}+a\sqrt{b^2-bc+c^2} \geq b\sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

4. (*Banco IMO*): Sejam $n > 1$ um inteiro dado. Determine o maior valor possível da soma $\sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j\left(x_i+x_j\right)$ sobre todas as n-uplas $x_1, \ldots, x_n$ de reais não negativos cuja soma é 1.

Estrada Dona Castorina, 110 Rio de Janeiro - Brasil 22460-320 Fone: 55 21 2529 5000/5284 Fax: 55 21 2512 4115
http://www.impa.br

Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica

5. (*Torneio das Cidades*) Sejam a, b e c reais positivos dados. Prove que $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}$

6. Dados os reais positivos $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, prove que

$$\sqrt[3]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)}\geq\sqrt[3]{a_1a_2a_3}+\sqrt[3]{b_1b_2b_3}$$

Desigualdades de Chebychev, Jensen e Cauchy

7. (*Olimpíada Turca*) Sejam $n>1$ inteiro e $x_1,\ldots,x_n$ reais positivos tais que $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$. Determine o valor mínimo de $\frac{x_1^5}{x_2+x_3+\ldots+x_n}+\frac{x_2^5}{x_1+x_3+\ldots+x_n}+\ldots+\frac{x_n^5}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}$.

8. (*Olimpíada Romena*): Seja h a altura de um tetraedro regular e h_1, h_2, h_3, h_4 as distâncias desde um ponto P em seu interior às faces do tetraedro. Prove que

$$\frac{h-h_1}{h+h_1}+\frac{h-h_2}{h+h_2}+\frac{h-h_3}{h+h_3}+\frac{h-h_4}{h+h_4}\geq\frac{12}{5}$$

9. (*Banco IMO*) : Sejam a, b, c, d reais não negativos tais que $ab+bc+cd+da=1$. Prove que

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}$$

10. Sejam $n>1$ e $x_1,x_2,\ldots,x_n$ reais positivos cuja soma é 1. Prove que

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\geq\sqrt{\frac{n}{n-1}}\geq\frac{\sqrt{x_1}+\ldots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}$$

11. Sejam $x_1,x_2,\ldots,x_n$ reais pertencentes ao intervalo [0, 1] e tais que $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$, com $0<a<1$. Prove que

Estrada Dona Castorina, 110 Rio de Janeiro - Brasil 22460-320 Fone: 55 21 2529 5000/5284 Fax: 55 21 2512 4115
http://www.impa.br

$$\frac{1-a}{1+a} \le \frac{1-x_1}{1+x_1}\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdots\frac{1-x_n}{1+x_n} \le \left(\frac{n-a}{n+a}\right)^n$$

Outras Desigualdades

12. (*Desigualdade de Bernoulli*): Sejam n um inteiro positivo e $x \ge -1$ um real. Prove que $(1+x)^n \ge 1+nx$.

13. (*Desigualdade entre as Médias de Potências*): Sejam $\alpha < \beta$ reais positivos. Então, para todos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos, vale

$$\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \ldots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

com igualdade se e só se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forem todos iguais.

14. (*Desigualdade de Giroux*): Sejam $I_1, \ldots, I_n$ intervalos fechados da reta e considere a função $f: I_1 \times \ldots \times I_n \to \mathbb{R}$ de n variáveis, convexa separadamente em relação a cada variável. Então, se $I_j = [a_j, b_j]$, f atinge seu valor máximo em um dos 2^n pontos da forma $(c_1, \ldots, c_n)$, com $c_i = a_i$ ou b_i para cada i. Prove isto e enuncie um resultado análogo à desigualdade de Giroux para uma função de n variáveis f, côncava separadamente em relação a cada variável.

15. (*Olimpíada Búlgara*): Sejam $n \ge 2$ um inteiro e $0 \le x_i \le 1$ para $1 \le i \le n$. Prove que

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1) \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

16. Os três itens a seguir visam derivar uma desigualdade difícil.

i. (*Desigualdade de Young*): Sejam p e q reais positivos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Prove que

$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \quad \forall\ x, y \ge 0$$

ii. (*Desigualdade de Holder*): Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ reais

Estrada Dona Castorina, 110 Rio de Janeiro - Brasil 22460-320 Fone: 55 21 2529 5000/5284 Fax: 55 21 2512 4115
http://www.impa.br

positivos e p, q reais positivos tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

iii. (*Desigualdade de Minkowsky*): Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ reais positivos e p um real maior que 1. Prove que

$$\sqrt[p]{(a_1+b_1)^p+\ldots+(a_n+b_n)^p} \leq \sqrt[p]{a_1^p+\ldots+a_n^p}+\sqrt[p]{b_1^p+\ldots+b_n^p}$$

Sugestão: Faça $c_i=(a_i+b_i)^{p-1}$ e use o ítem anterior para (a_i) e (c_i) e para (b_i) e (c_i).

Referências:

[1] Shklarsky, D. O., Chentzov, N. N. e Yaglom, I. M. The USSR Olympiad Problem Book. Dover. Toronto, 1993.
[2] Rousseau, C. e Lozansky, E. Winning Solutions. Springer-Verlag, 1996.
[3] Lima, Elon L., Análise Real, vol. 1. IMPA, 1995.

Estrada Dona Castorina, 110 Rio de Janeiro - Brasil 22460-320 Fone: 55 21 2529 5000/5284 Fax: 55 21 2512 4115
http://www.impa.br