Otimização Multiobjetivo para Problemas Irrestritos

Lizet Santa Cruz Calderón& José Mario Martínez & Maria Aparecida Diniz-Ehrhardt

IMECC/UNICAMP

Lizet1910@gmail.com

Resumo

Em otimização multiobjetivo, mais de uma função e minimizada simultaneamente. Normalmente, quase nunca ha um minimizador para todas as funções. Neste trabalho apresentamos um método de regularização de ordem p para encontrar pontos estacionarios de problemas multiobjetivos com restrições, sob a condição de Hölder continuidade nas derivadas da função objetivo. As restrições a considerar, devem ser bastante simples. Dado uma iteração x^k nosso método minimiza um modelo do problema original mais um termo de regularização sujeito as restrições. O método apresentado neste trabalho considera modelos (não necessariamente Taylor) de ordem arbitrária, e usamos um criterio de descida para todas as funções objetivas.

Introdução

Dado o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \;\; & F(x) \\ \text{sujeita a} \;\; & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1}$$

onde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função continuamente diferenciável a qual pode ser escrita como $F(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$, e $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ so funções reais cujas primeiras derivadas são Holder Contnuas, $\forall i = 1, ..., m$, consideremos $M^i_{\overline{x}}(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, uma função real, definida como:

$$M^i_{\overline{x}}(x) = f_i(\overline{x}) + \nabla f_i(\overline{x})^T(x - \overline{x}), \forall i = 1, ..., m.$$

Assumimos que as derivadas de $M^i_{\overline{x}}(x)$ existem $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Objetivo

Nosso objetivo e calcular o número de iterações necessárias para calcular o ponto estacionário aproximado de uma função vetorial em termos de complexidade.

Problema e Resultado

Suponhamos que x e $\overline{x}$ satisfazem as seguintes hipóteses:

$$f_i(x) \leq M^i_{\overline{x}}(x) + L||x - \overline{x}||^{\beta+1},$$

$$||\nabla f_i(x) - M_{\overline{x}}(x)|| \leq L||x - \overline{x}||^{\beta}$$

$$M^i_{\overline{x}}(x) + \sigma||x - \overline{x}||^2 \leq f_i(\overline{x})$$

$$||\nabla[M^i_{\overline{x}}(x) + \sigma||x - \overline{x}||^2]|| \leq \theta||x - \overline{x}||^2$$

Definição 1: Dizemos que o ponto x^* é um ponto viável do Problema inicial se

$$\begin{aligned} & f_i(x^*) \leq f_i(x), \forall x \in \Omega, \forall i \in I, \\ & f_{i_0}(x^*) \neq f_{i_0}(x), \text{ para algum } i_0 \in I \end{aligned}$$

Algoritmo 1 Assuma que $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0, 1)$, e $\sigma_{min} > 0$. Inicialize $k \leftarrow 0$, $\sigma_0 = \sigma_{min}$.
Passo 1: Defina $\sigma \leftarrow \sigma_k$.
Passo 2: Resolva o subproblema

$$\min_{||x - x^k|| \leq 1} \max_{i=1,...,m} \langle \nabla f_i(x^k), x - x^k \rangle - \sigma||x - x^k||^2. \tag{2}$$

Defina $\gamma > 0$, talque $x^{trial} - x^k = -\frac{1}{2\sigma}\sum_{i=1}^m \gamma_i \nabla f_i(x^k)$, $||\gamma||_1 = 1$
Passo 3: Se a condio de decrscimo suficiente

$$f_i(x^{trial}) \leq f_i(x^k) - \alpha\sigma||x^{trial} - x^k||^2, \tag{3}$$

no se cumpre para algum i, faa $\sigma \leftarrow 2\sigma$, e volte para o passo 2. Caso contrrio v para o passo 4.
Passo 4: Defina $x^{k+1} = x^{trial}$, $k \leftarrow k + 1$, $\sigma_k = \sigma$, $\gamma_k = \gamma$ e v ao Passo 1.

Teorema 1: Assuma que x^{k+1} é calculada pelo Algoritmo 1, e cumpre as condições acima, para $\overline{x} = x^k$, para todos os pontos x calculados no passo 2 na iteração k. Definamos

$$c_1 = \min\left\{\frac{1}{36}\frac{1}{2\theta}, \frac{1}{36\left\{2\max\left\{\frac{2^{\frac{1-\beta}{\beta}}L^{\frac{1}{\beta}}}{3}, \frac{L^{\frac{1}{\beta}}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{\beta}}6^{\frac{\beta-1}{\beta}}}\right\}\right\}}\right\}. \tag{4}$$

Então

$$f_i(x^{k+1}) \leq f_i(x^k) - \alpha c_1 \epsilon^{\frac{\beta+1}{\beta}}, \forall i = 1, ..., m. \tag{5}$$

Conclusão

Com os resultados obtidos para o caso p = 1 conclui-se que, em termos de complexidade, o número de iterações necessárias para calcular um minimizador aproximado é $o(\epsilon^{\frac{\beta+1}{\beta}})$.

Referências

[1] J. M. Martínez (2017), *On High-order Model Regularization for Constrained Optimization*, SIAM Journal on Optimization, **27**4,2447-2458.

[2] A. L. Custódio, J. F. A. Madeira, A. I. F. Vaz, and L. N. Vicente (2011)*Direct Multisearch for Multiobjective Optimization*, SIAM Journal on Optimization, **21**3,1109-1140.

[3] L.M.Graña Drummond and.F.Svaiter(2005), *A steepest descent method for vector optimization*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **175**2,395-414.

Agradecimentos

Agradeço à CNPq pela bolsa de doutorado.